

EXPLORACIÓN DE DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS APROXIMADAS EN GEOGEBRA: UNA EXPERIENCIA EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Marisa Battisti y Diana R. Kohan
Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina
marisa.battisti@uner.edu.ar

El presente artículo es un reporte del cambio efectuado en la metodología de enseñanza y aprendizaje del tópico Distribuciones Probabilísticas Aproximadas, en el marco de la asignatura Probabilidad y Estadística, dictada en las carreras de grado la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina. Con intenciones de alcanzar mejores procesos de aprendizaje se realizaron dos instrumentos de enseñanza en GeoGebra que fueron utilizados tanto en la clase teórica como en la práctica para resolver una serie de situaciones problemáticas. Se percibe que la actividad posibilitó espacios en los cuales el estudiante debió cuestionarse la implementación de ciertas metodologías de resolución, que habitualmente desarrolla de manera mecánica sin preguntarse si los procedimientos empleados se alinean con los fundamentos teóricos.

MOTIVACIÓN

Probabilidad y Estadística es una asignatura del segundo año de las carreras de Bioingeniería, Licenciatura en Bioinformática, e Ingeniería en Transporte, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina. El presente artículo es un reporte del cambio efectuado en el año 2021 en la metodología de enseñanza y aprendizaje de un contenido del programa analítico.

En el dictado de la asignatura y luego de abordar el Teorema Central del Límite, es inmediato el desarrollo de la distribución Normal como limitante de la distribución Binomial y de Poisson bajo ciertos requerimientos teóricos. Si bien en la práctica son abordadas diferentes actividades de aplicación, se percibe que los estudiantes no logran ver la importancia de la herramienta ni tampoco vislumbran la pertinencia de su implementación a la hora de resolver problemas concretos.

A la luz de lo antes expuesto, la acción seguida ha sido generar un recurso y una serie de actividades tendientes hacia un mejor aprendizaje de los contenidos de las Distribuciones Probabilísticas Aproximadas: distribución Normal como una aproximación a la distribución Binomial y a la distribución de Poisson, y Poisson como aproximación a la Binomial.

FUNDAMENTACIÓN

Dadas las características de la época que transita la sociedad hoy en día, incorporar la tecnología a los procesos de enseñanza y aprendizaje cobra vital importancia. El agregado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) a las tareas de enseñanza provoca una interacción próxima con el estudiante, desarrollando habilidades en el campo tecnológico e informático fortaleciendo los entornos de aprendizaje (Rodríguez Uribe, 2017).

Por esta razón, añadir las TIC mediante un correcto diseño de los materiales y los recursos, marca una gran diferencia en el uso activo que hará el alumno de ellos, caracterizándose por un mayor atractivo y quizás potencie aún más el aprendizaje si proporcionan interactividad (Gámez Mellado y Marín Trechera, 2010).

Siguiendo a Pea (citado en Insunza, 2015), la tecnología que ofrecen hoy las computadoras y los dispositivos móviles, cuando son utilizados de manera adecuada, tiene la capacidad de generar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los alumnos. Adhiriendo a las palabras del mencionado autor, las computadoras se conciben como extraordinarias herramientas cognitivas por ser el medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en el pensamiento, en el aprendizaje, y las actividades de resolución de problemas. Permiten al estudiante pensar matemáticamente, operando no solo con números, sino también con símbolos, almacenando y manipulando objetos, para luego elaborar interacciones entre ellos. Es de esta manera, que el aspecto representacional y de cálculo de la tecnología posibilitan el desarrollo de imágenes visuales de los conceptos y sus conexiones, que les puede ayudar a los estudiantes a elaborar imágenes mentales correctas y comprender de forma adecuada las relaciones subyacentes entre diferentes objetos matemáticos.

En palabras de Duval (como se cita en Mercado Martínez, 2013), se dice que un estudiante comprende un concepto matemático, cuando es capaz de representarlo en al menos dos registros de

representación. A la hora de elegir un software para las clases de Matemática, el software libre GeoGebra es ampliamente utilizado en muchas áreas como Geometría, Álgebra y Cálculo, en diferentes niveles educativos, y se caracteriza principalmente por integrar tres diferentes registros de representación que se pueden usar simultáneamente, cuando se desarrolla una actividad de aprendizaje, estos son: algebraico, gráfico, y hoja de cálculo (Mercado Martínez, 2013). Se entiende que esta es una cualidad, pues el manejo de múltiples formas de representación dinámica e interactiva enriquece el significado de los conceptos matemáticos mostrados a los estudiantes (Batanero, 2001). El diseño del software GeoGebra permite que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y representaciones.

Otra ventaja del uso de GeoGebra reside en el diseño y la implementación de instrumentos de enseñanza creados en él, ya que es posible crearlos y aplicarlos en poco tiempo, con una formación básica y sin conocimientos avanzados sobre su manejo, obteniendo resultados vistosos.

Un rasgo distintivo de este software es que brinda la posibilidad de enlazar dinámicamente gráficas, fórmulas algebraicas, y entradas de la hoja de cálculo en forma simultánea, siendo visibles sobre una misma pantalla. Destacando que, en el área de Probabilidad, cobran relevancia la hoja de cálculo, la ventana de graficación, la calculadora de probabilidades, y los deslizadores (Insunza, 2014).

Las distribuciones de probabilidad tienen representación simbólica, gráfica, y numérica. Sin embargo, el enfoque tradicional de enseñanza focaliza en el cálculo de probabilidades recurriendo a la representación numérica (tablas de probabilidad) y simbólica (fórmulas de la distribución), prestándole escasa relevancia a la representación gráfica, que ayuda a visualizar importantes propiedades de las distribuciones, como lo son la tendencia central, la forma, y la variabilidad.

Un acercamiento más integral a las distribuciones teóricas debe incluir, según Insunza (2014) además del cálculo de probabilidades, el análisis de la extensión de la distribución a través de su gráfica, los valores más o menos probables, y el efecto de los parámetros en las propiedades de las distribuciones. A partir de esto, se deduce que la implementación de GeoGebra en las clases de Probabilidad y Estadística puede aportar al aprendizaje de las conceptualizaciones de la asignatura en un entorno de acción diferente, promoviendo la exploración, la experimentación, el desarrollo de ideas, y las habilidades de los estudiantes (Moreno y Felipe, 2014). Se menciona que la cátedra ya comenzó a implementar instrumentos de enseñanza en GeoGebra, mostrando la aplicabilidad del Teorema de Bayes en el cálculo de Sensibilidad y Especificidad de pruebas diagnósticas, a través de la competencia de resolución de problemas (Kohan y Battisti, 2019).

METODOLOGÍA

Se construyeron dos instrumentos de enseñanza en GeoGebra que luego fueron subidos al repositorio de libre acceso de dicho software (<https://www.geogebra.org/>).

En la Figura 1 se aprecia el recurso interactivo diseñado para la distribución Binomial (también disponible en <https://www.geogebra.org/m/gj6rwmw>). En él se puede apreciar el gráfico de las probabilidades puntuales para la distribución Binomial de parámetros n y p , y las casillas que permiten tildar la representación de la distribución Normal con la media $\mu = np$ y desvío estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, además del gráfico de probabilidades puntuales para la distribución de Poisson con parámetro de intensidad $\lambda = np$. Aquí es válido aclarar que las distribuciones discretas corresponden ser representadas con un conjunto de segmentos de recta dibujados en los valores de x con longitudes que representen la probabilidad para cada valor, sin embargo en muchas otras ocasiones es frecuente encontrarlas representadas por histogramas de probabilidad en los cuales cada rectángulo tiene base unitaria que se extiende desde $x - 0,5$ hasta $x + 0,5$ y cuya altura es la probabilidad en ese punto. De esta forma, el área de cada rectángulo es simplemente la probabilidad para dicho valor (DeGroot, 1988; Johnson y Kuby, 2012; Walpole et al., 2012). Dada la imposibilidad de realizar otro tipo de gráfico en GeoGebra, hemos utilizado histogramas de probabilidad para las representaciones de las distribuciones Binomial y Poisson.

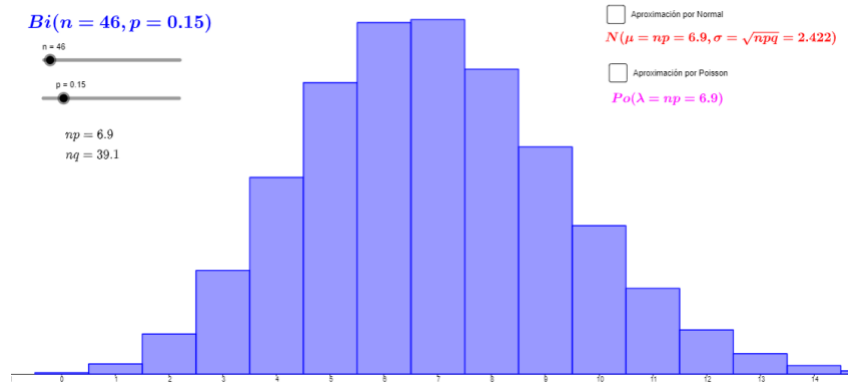


Figura 1. Vista del recurso interactivo diseñado en GeoGebra para la distribución Normal y Poisson como limitantes de la distribución Binomial

Es sabido que puede emplearse la distribución de Poisson para aproximar probabilidades binomiales cuando la cantidad de ensayos es un número muy grande y p , o el número $(1 - p)$, se acerque mucho a 0. Y además también es posible recurrir a la distribución Normal cuando n es lo suficientemente grande, tomando como lineamiento que ambos productos np y $n(1 - p)$ sean de al menos 5 unidades. A partir del recurso en GeoGebra, es sencillo mostrar a los estudiantes qué ocurre al cambiar los valores de n y p comparando las gráficas de la distribución exacta Binomial con las dos distribuciones aproximadas, evaluando su pertenencia en cada caso.

A modo de ejemplo, se exhibe la vista del recurso con la gráfica de una distribución Binomial con $n = 550$ y $p = 0,25$ en color azul, la correspondiente curva normal en rojo, y la representación de la distribución de Poisson con la misma media, en color rosado (Figura 2). Es de notar que aproximar mediante Poisson no sería adecuado puesto que la probabilidad de un éxito no es lo suficientemente pequeña. Gráficamente se puede apreciar que el histograma de probabilidad rosado difiere bastante del diagrama azul propio de la distribución exacta. Por el contrario, al ser grande la cantidad de éxitos y los productos np y $n(1 - p)$ mayores que 5 unidades, es correcto emplear la distribución Normal como aproximación de esta distribución Binomial, percibiendo que el área de los rectángulos azules y el área bajo la curva Gaussiana son similares (Johnson y Kuby, 2012).

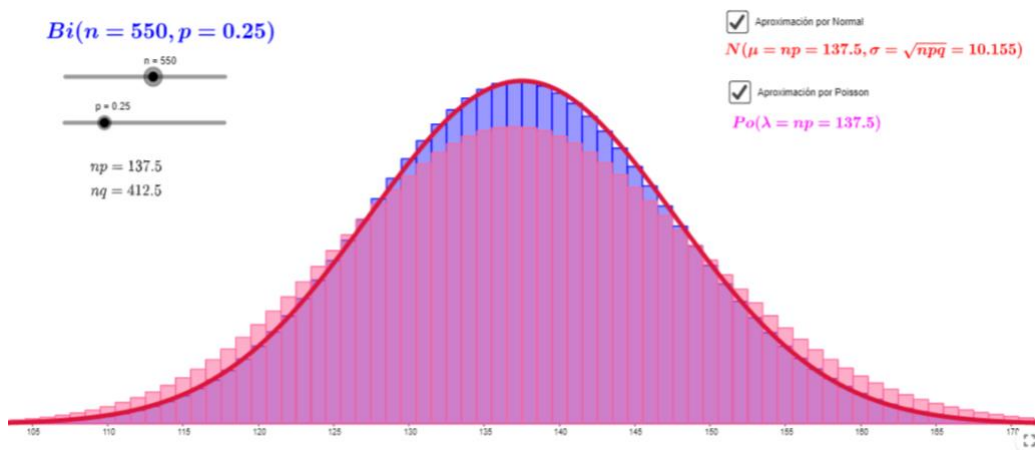


Figura 2. Vista del recurso para la distribución con Binomial con $n = 550$ y $p = 0,25$

Otro es el caso cuando se tiene una distribución Binomial con $n = 700$ y $p = 0,006$ (véase Figura 3). Al ser p cercano a cero y n grande, la aproximación de Poisson es la adecuada, y gráficamente las distribuciones de probabilidad puntual son similares, apreciando que el histograma de probabilidad de la Poisson (rosado) es prácticamente igual que el de la distribución exacta (azul). Sin embargo, la aproximación por la distribución Gaussiana no es una alternativa adecuada puesto que uno de los

productos np y $n(1-p)$ es inferior a 5 unidades, hecho que también se distingue en el recurso, al ver las grandes diferencias entre las gráficas de la distribución exacta y la curva normal.

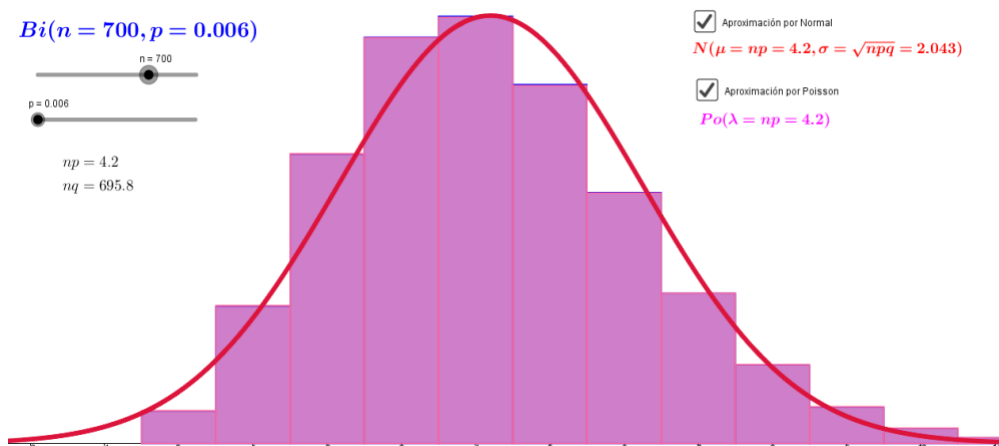


Figura 3. Vista del recurso para la distribución con Binomial con $n = 700$ y $p = 0,006$

Para la elaboración de este instrumento en el software GeoGebra, se comenzó incorporando dos deslizadores en la vista gráfica: uno para la probabilidad de un éxito (p) y otro para la cantidad de ensayos (n) de la distribución Binomial. Siendo la principal cualidad de esta herramienta que el usuario puede, moviendo el cursor, cambiar dicho valor y observar cómo en un esquema estas variaciones alteran total o parcialmente dicha estructura. Posteriormente, con la Barra de entrada al pie de la pantalla de GeoGebra se ingresa con el comando *DistribuciónBinomial*(*<Número de ensayos>*, *<Probabilidad de éxito>*) la gráfica de la distribución Binomial, fijándose como parámetros los objetos n y p que se crearon en el paso anterior. Luego, se añade también por la barra de entrada y en forma de *objetos dependientes*, los números μ y σ calculados a partir de los valores de los objetos n y p . Después, se ingresa el comando *Normal*(*<Media>*, *<Desviación estándar>*, x , *<Acumulada (true/false)>*), siendo la media y el desvío los objetos μ y σ , respectivamente, e indicando “false” para que grafique la función de densidad de la distribución Normal. La función que origina esta gráfica es luego vinculada a través de una *casilla de control* que brindará la posibilidad al usuario de mostrar la curva cuando esté tildada, u ocultarla en caso contrario.

De un modo similar, se agrega el comando *Poisson*(*<Media>*, *<Acumulada (true/false)>*) en la Barra de entrada, estableciendo como media el valor del objeto μ y “false” para que grafique la distribución de probabilidad puntual de la distribución de Poisson. Inmediatamente, se asigna dicha función a otra casilla de control.

Para culminar el proceso de construcción se agregan *textos dinámicos* con los nombres de las distribuciones y sus parámetros, que varían al mover los deslizadores, y se edita la vista gráfica para que sus dimensiones se ajusten a los valores variables de n y p , sin entorpecer el objetivo del recurso. En efecto, se establece mostrar la porción del plano con abscisas en el intervalo $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$, escrito en función de los objetos antes declarados, y las ordenadas acotadas superiormente en $g(\mu) + 0,01$, siendo g la expresión de la función de densidad de la distribución Gaussiana y $g(\mu)$ el valor máximo de la misma.

Con una serie de pasos similares, se estructuró el otro instrumento de enseñanza (Figura 4) que consistió en un recurso interactivo ideado para la distribución de Poisson (puesto a disposición del público en <https://www.geogebra.org/m/g7bggzts>). En él se observa el gráfico de las probabilidades puntuales para la Poisson con parámetro de intensidad λ , en color violeta, y las casillas que permiten tildar la representación de la distribución Normal con $\mu = \lambda$ y $\sigma = \sqrt{\lambda}$, en color rojo. Basándose de este recurso, es fácil mostrar que la aproximación es buena cuanto mayor sea el valor de λ , notando que ambas gráficas determinan áreas similares, conforme aumente dicho parámetro.

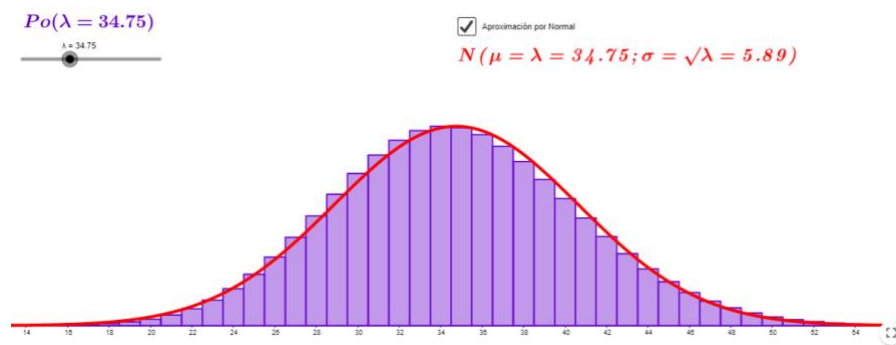


Figura 4. Vista del recurso interactivo diseñado en GeoGebra para la distribución Normal como limitante de la distribución de Poisson

En la clase teórica se abordó el tema mostrando la aplicación del recurso. Al estudiar los diferentes teoremas que permiten llevar a cabo las aproximaciones correspondientes, les fue intuitivo a los estudiantes mover los deslizadores y observar lo ocurrido con las gráficas, ejemplificando las generalizaciones postuladas.

Luego del desarrollo teórico, la primera mitad de la clase de práctica consistió en resolver los clásicos ejercicios de aplicación que comúnmente se encuentran en los textos universitarios, agrupando las actividades según el tipo de aproximación que debía utilizarse para efectuar los cálculos de probabilidades, poniendo el foco en las llamadas correcciones por continuidad cuando se recurre a la distribución normal para aproximar distribuciones discretas.

En la segunda mitad de la clase práctica correspondiente se presentaron una serie de situaciones problemáticas diferentes a las ya trabajadas en las cuales los estudiantes debían no solo computar las probabilidades sino también evaluar la pertinencia y el porqué de aplicar la distribución aproximada mediante los instrumentos brindados. Es allí donde precisaron de una lectura adecuada de los problemas, extrayendo los principales datos de la distribución exacta, e incluso viendo si correspondía o no valerse de alguna de las herramientas brindadas mediante el recurso interactivo. En esta instancia, los estudiantes no fueron guiados por el docente sino que se vieron en la necesidad de ser ellos mismos los protagonistas de la clase. De este modo, el accionar del profesor se vio restringido a cerrar las actividades, organizando la puesta en común de los procedimientos de resolución puestos en juego por los jóvenes para resolver las actividades. A continuación, se detallan algunas de las situaciones problemáticas que trabajó el estudiantado.

- Problema 1: El Ministerio de Salud está interesado en estudiar el número de ablaciones que se realizan anualmente en la provincia de Entre Ríos, siendo que en años anteriores se han realizado en promedio 38 de tales procedimientos. Calcule la probabilidad de que en el año en curso ocurran: (a) entre 32 y 40 ablaciones en la provincia, ambos extremos inclusive; (b) al menos 19 ablaciones en nuestra provincia; (c) a lo sumo 48 ablaciones en la provincia.
- Problema 2: Una central de datos tiene 1000 unidades de disco. Suponiendo que una unidad de disco falle en un día dado con una probabilidad de 0,002. Se pide: (a) Calcule el número promedio de unidades de disco que fallan a diario. (b) Obtenga la probabilidad de que en un día sucedan entre 2 y 7 fallas, ambos extremos inclusive. (c) Halle la probabilidad de que en un día ocurran sólo 5 fallas.
- Problema 3: Un gran sistema cuenta con 10 000 unidades de disco, en las que cada una tiene la misma probabilidad de falla que en el problema 2. Determine: (a) la probabilidad de que en el sistema fallen menos de 25 discos. (b) la probabilidad de que en el sistema fallen solo 29 discos.
- Problema 4: La calidad de los discos de computadora se mide por el número de pulsos faltantes. Una determinada marca es tal que el 80% de los discos producidos no tienen pulsos faltantes. Si se inspeccionan n discos de esta marca y se contabilizan la cantidad X de ellos que no tienen pulsos faltantes, analizar: (a) si se inspecciona $n = 20$ de estos discos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 13 discos no presenten pulsos faltantes? (b) si se inspeccionan $n = 160$ de estos discos, ¿cuál es la probabilidad de que entre 115 y 125 discos no presenten pulsos faltantes, ambos extremos incluidos?

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se efectuó una comparación de los resultados alcanzados por los estudiantes en los problemas evaluados de este contenido en los exámenes parciales antes (2020) y después (2021) de haber aplicado la metodología. Atendiendo que este tipo de problema equivale a 25 puntos de los 100 del examen parcial, se contrastaron las notas del grupo del segundo cuatrimestre 2020 ($n_1 = 36; \bar{x}_1 = 11,2; S_1 = 7,5$) con las correspondientes al grupo del mismo periodo en 2021 ($n_2 = 41; \bar{x}_2 = 16,3; S_2 = 6,6$), detectando diferencias significativas entre las medias ($t_{obs} = 3,179; p - value = 0,002$), y siendo mayor en este último conjunto. Si bien los resultados son parciales por no considerarse exactamente los mismos estudiantes, la información habilita al equipo de cátedra a continuar implementando estos recursos interactivos en el presente año.

Se percibe que la actividad posibilitó espacios en los cuales el estudiante debió cuestionarse la implementación de ciertas metodologías de resolución, que asiduamente desarrolla de manera mecánica sin preguntarse si los procedimientos empleados se alinean con los fundamentos teóricos.

Se cree que a pesar de que GeoGebra es un software ávidamente usado para Álgebra y Geometría, la propuesta enmarcada brinda un aporte metodológico que busca contribuir a la comprensión de conceptos probabilísticos a partir de una herramienta tecnológica de distribución libre.

No obstante, frente a la masividad de actividades y propuestas de enseñanza mediadas por TIC, se adhiere al posicionamiento de nunca anteponer la tecnología a la pedagogía (Gámez Mellado y Marín Trechera, 2010), contemplando que las nuevas herramientas son un medio para mejorar los procesos de enseñanza de aprendizaje y no un fin en sí mismo. Por lo cual es tarea de este grupo docente continuar pensando en implementaciones pertinentes de la tecnología que aporten de manera efectiva valor agregado a las actividades planificadas para alcanzar buenos resultados de aprendizaje en los estudiantes.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidad de Granada.
- DeGroot, M. (1988). *Probabilidad y estadística* (2ª ed.). Addison-Wesley.
- Gámez Mellado, A., y Marín Trechera, L. M. (2010). Distribuciones estadísticas: Un ejemplo de uso de GeoGebra en enseñanza universitaria. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales,"* (74), 33–42.
- Insunza, C. S. (2014). GeoGebra: *Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad* [Presentación en papel]. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires, Argentina.
- Insunza, C. S. (2015). Dificultades en el desarrollo de una concepción estocástica de las distribuciones muestrales utilizando un ambiente computacional. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. M. Gea, y M. M. López (Eds.), *Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria*, 2 (pp. 197–205). Universidad de Granada.
- Johnson, R., y Kubly, P. (2012). *Estadística elemental*. Cengage Learning.
- Kohan, D., y Battisti, M. (2019). Sensibilidad y especificidad: Enfoque basado en la competencia de resolución de problemas. In R. Uriel Cukierman y C. Guillermo Kalocai (Comps.), *El enfoque por competencias en las ciencias básicas. Casos y ejemplos en educación en ingeniería* (pp. 233–244). CONFEDI y CIIE. <https://confedi.org.ar/download/Libro-Enfoque-por-Competencias-CCBB.pdf>
- Mercado Martínez, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con GeoGebra. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las jornadas virtuales en didáctica de la estadística, Probabilidad y combinatoria* (pp. 309–317). Universidad de Granada.
- Moreno, C., y Felipe, A. (2014). Introducción al cálculo de probabilidades con GeoGebra. *Encuentro Distrital de Educación Matemática (EDEM 1). Primer encuentro. Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: Realidades y desafíos* (pp. 421–429). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <http://funes.uniandes.edu.co/10273/>
- Rodríguez Uribe, L. A. (2017). *GeoGebra como recurso educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación superior* [Especialista en docencia universitaria, Universidad Militar Nueva Granada]. Repositorio Institucional UMNG. <https://repository.unimilitar.edu.co/handle/10654/17042>
- Walpole, R., Myers, R., y Myers, S. (2012). *Probabilidad y estadística*. Pearson Prentice Hall.