

APROXIMACIÓN A UNA PROPUESTA DE NIVELES DE RAZONAMIENTO INFERENCIAL

Jesús Guadalupe Lugo-Armenta y Luis R. Pino-Fan
Universidad de Los Lagos, Chile
jesus.lugo@ulagos.cl

En Educación Estadística se ha enfatizado promover gradualmente el razonamiento inferencial utilizando resultados obtenidos en las últimas dos décadas sobre la exploración y promoción del razonamiento inferencial informal y conectándolo con las ideas clave del razonamiento inferencial formal. En este trabajo presentamos una propuesta general de niveles progresivos de razonamiento inferencial, a partir de propuestas previas de niveles de razonamiento inferencial sobre los estadísticos chi-cuadrada y t-Student. Para ello, se ha recurrido a criterios epistemológicos recuperados mediante un estudio histórico-epistemológico sobre los estadísticos mencionados y a las directrices didácticas otorgadas por la literatura de Educación Estadística. Los niveles propuestos pueden utilizarse tanto para caracterizar el razonamiento inferencial de estudiantes y profesores, como en el diseño de actividades que promuevan el razonamiento inferencial.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha observado que la inferencia estadística ha cobrado relevancia para los currículos de diversos países, tal es el caso del currículo de matemáticas de educación media de Chile. En este currículo se han incorporado tópicos de inferencia estadística en tercero y cuarto medio (grados 11 y 12), y se espera que el estudiante pueda realizar inferencias mediante las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza para la media de una muestra o la diferencia de medias utilizando las distribuciones normal y *t*-Student (Ministerio de Educación de Chile, 2019). Sin embargo, nos cuestionamos si los estudiantes y profesores se encuentran preparados para afrontar la enseñanza de tópicos de inferencia estadística en este nivel educativo. Las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentar problemas de inferencia en el nivel universitario han sido ampliamente documentadas, en ellas se destacan el nivel de significancia, los errores tipo I y tipo II, el planteamiento de las hipótesis estadísticas, el valor-*p* y las distribuciones muestrales (e.g., Batanero et al., 2012; Garfield et al., 2008).

Para afrontar estas dificultades se ha propuesto, por una parte, aproximarnos a la inferencia estadística desde una perspectiva informal, denominada razonamiento inferencial informal (RII; e.g., Makar y Rubin, 2009; Zieffler et al., 2008) y, por otra parte, promover el razonamiento inferencial formal (RIF; e.g., Makar y Rubin, 2018; Pfannkuch et al., 2015). Las investigaciones han hecho distinciones entre el RII y el RIF, refiriéndose a este último razonamiento como aquel que utiliza métodos formales de inferencia estadística. Sin embargo, tal y como lo señalan Bakker et al. (2008), las técnicas consideradas informales para la inferencia estadística pueden ser consideradas formales en otras áreas o en los momentos previos a la enseñanza de la inferencia. En este sentido, consideramos que es necesario desarrollar propuestas que permitan explorar y desarrollar progresivamente el razonamiento inferencial. Así, en este trabajo presentamos una propuesta general de cuatro niveles progresivos de razonamiento inferencial que integra aspectos epistemológicos y didácticos, y los cuales avanzan progresivamente en grado de formalidad (de lo intuitivo a lo formal) y generalidad (particular-general). Esta propuesta se realiza sobre la base de los indicadores y directrices de niveles de razonamiento inferencial particulares para los estadísticos chi-cuadrada y *t*-Student.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Para el desarrollo de esta investigación se utilizaron herramientas teórico-metodológicas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS; Godino et al., 2007, 2019). Destacamos la noción de práctica matemática que es definida como “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). En las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos matemáticos, los cuales son representados de forma textual, gráfica, oral o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen seis tipos de objetos matemáticos, denominados objetos matemáticos primarios (Godino et al., 2007, 2019). Por su parte, el significado de un objeto matemático es entendido como un sistema de prácticas que

realiza una persona o una institución para resolver determinado tipo de situaciones-problemas en los que interviene un objeto matemático (Godino y Batanero, 1994). Así, un objeto matemático, por ejemplo, el estadístico t -Student, puede tener diversos significados que dependen del sistema de prácticas utilizado para resolver un tipo de situaciones-problemas.

En el EOS el *razonamiento* se asume como un macroproceso social y epistémico, en el cual se utilizan los objetos matemáticos primarios para resolver situaciones/problema (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021b). Entonces, un individuo da cuenta de su razonamiento en la medida que emergen de forma sistemática y progresiva los objetos matemáticos primarios vinculados a un determinado objeto matemático (e.g., la t -Student). Así, los objetos matemáticos primarios involucrados en la práctica matemática dan cuenta del razonamiento inferencial informal, pre formal o formal movilizado.

El paradigma metodológico del estudio es de carácter cualitativo, debido a que se identificaron una serie de elementos epistémicos, con el uso de las nociones del EOS descritas anteriormente (e.g., objetos matemáticos primarios: representaciones, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos, y argumentos), que permitieron junto con las investigaciones de educación estadística construir niveles de razonamiento inferencial de lo informal a lo formal.

CONSTRUCCIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO INFERENCIAL

A partir de los matices epistemológicos identificados en los significados de los estadísticos chi-cuadrada y t -Student, mediante el estudio histórico-epistemológico, y los aportes de la literatura de educación estadística sobre el RII, el RIF, la transición del RII al RIF, y de los estadísticos señalados, fue posible definir criterios o descriptores para cada uno de los cuatro niveles propuestos para los estadísticos mencionados. A continuación, por cuestiones de espacio, presentaremos únicamente algunos aspectos clave y la intencionalidad de los cuatro niveles progresivos de razonamiento inferencial para el estadístico chi-cuadrada y t -Student.

Niveles de Razonamiento Inferencial Para el Estadístico Chi-Cuadrada

Para la construcción de los niveles de razonamiento inferencial para el estadístico chi-cuadrada, se consideraron los matices epistemológicos de doce significados parciales identificados para el estadístico chi-cuadrada (Lugo-Armenta et al., 2021): (*Nivel 1*) el método de intercomparación y el método gráfico para conjeturar si un grupo de datos sigue una distribución normal, coeficiente de asociación Q para conjeturar si existe asociación entre dos variables; (*Nivel 2*) estadístico chi-cuadrada, grados de libertad, distribución chi-cuadrada, la probabilidad para interpretar los valores obtenidos con el estadístico chi-cuadrada, identificación de la hipótesis nula y su planteamiento en lenguaje natural; (*Nivel 3*) factor de corrección de continuidad, distribución asintótica, significancia como un límite, estadístico teórico con respecto a cierta probabilidad y grados de libertad y, regla de decisión intuitiva; (*Nivel 4*) planteamiento de las hipótesis en lenguaje simbólico y natural, regla de decisión, valor- p , valor crítico.

Asimismo, en nuestra propuesta retomamos aportes de la literatura científica de Educación Estadística, de los cuales destacamos aspectos tales como la visualización, interpretar las conclusiones en el contexto del problema, la lógica de las pruebas de hipótesis, incertidumbre, planteamiento de las hipótesis nula y alternativa en lenguaje natural, distribución de probabilidad mediadas por recursos tecnológicos, estadístico-parámetro, valor- p , nivel de significancia, criterio de decisión, los errores tipo I y tipo II, concepción de asociación e independencia. En la Tabla 1 se describe brevemente la intencionalidad de cada uno de los niveles propuestos.

Esta propuesta ha sido considerada para el estudio de los niveles de razonamiento inferencial asociado a las prácticas de profesores de matemáticas cuando resuelven problemas de inferencia estadística sobre la chi-cuadrada, y como resultado se logró observar su utilidad y sus potenciales usos para el desarrollo progresivo del razonamiento inferencial (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021a).

Niveles de Razonamiento Inferencial Para el Estadístico t -Student

Al igual que en la propuesta anterior, utilizamos las directrices de la literatura científica en Educación Estadística, donde además de las ya mencionadas en la propuesta de niveles anterior destacamos el tratamiento de la media y la dispersión, y los objetos matemáticos primarios y procesos identificados en cada uno de los doce significados parciales resultantes del estudio histórico-epistemológico sobre el estadístico t -Student, para caracterizar cuatro niveles de razonamiento

inferencial para este estadístico. En la Tabla 2 recogemos la intencionalidad de cada uno de los cuatro niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t -Student.

Tabla 1. Resumen de los niveles de Razonamiento Inferencial para el estadístico chi-cuadrada

Nivel 1	Los indicadores de este nivel se corresponden con un razonamiento inferencial informal y se caracterizan por el uso que se le da a la visualización (e.g., forma, dispersión, amplitud de los cuartiles, mediana y sesgo) y al tratamiento de datos bajo técnicas intuitivas (e.g., método gráfico, coeficiente de asociación y probabilidad condicional) para la bondad de ajuste e independencia para realizar conjeturas fundamentadas.
Nivel 2	Este nivel se considera pre formal debido a que algunos indicadores tienen rasgos del RII. Los indicadores clave de este nivel refieren al reconocimiento de la hipótesis y su planteamiento en lenguaje natural, identificación de la prueba con el estadístico chi-cuadrada necesaria para resolver el problema (bondad de ajuste, independencia y homogeneidad), la distribución chi-cuadrada, el estadístico y utilizar la probabilidad para interpretar el valor del estadístico.
Nivel 3	Al igual que el nivel anterior este también se considera pre formal, pero con un mayor grado de formalidad. En este nivel se destacan los indicadores que refieren a las restricciones que tienen las pruebas con el estadístico chi-cuadrada, al planteamiento de las hipótesis nula y alternativa en lenguaje natural, aplicación del estadístico chi-cuadrada con factor de corrección de continuidad (cuando aplica), la significancia como un límite significativo, el estadístico teórico y una regla intuitiva para la toma de decisiones.
Nivel 4	Los indicadores de este nivel se corresponden con un razonamiento inferencial formal y se destacan los indicadores para la toma de decisiones con el valor-p y el valor crítico, que incluyen nociones claves como el nivel de significancia y el nivel de confianza; planteamiento de las hipótesis con lenguaje estadístico, brindar una solución en términos del problema y con argumentos fundamentados estadísticamente. Además, indicadores para la validación de la inferencia realizada (e.g., error tipo I y tipo II, y potencia de la prueba).

Algunos atributos epistémicos correspondientes al estadístico t -Student, retomados de los significados de este estadístico, que destacamos en la construcción de esta propuesta de niveles de razonamiento inferencial son: (*Nivel 1*) el método de intercomparación y de fluctuación para identificar la variación interna de uno y dos conjuntos de datos, respectivamente; (*Nivel 2*) planteamiento de la hipótesis en lenguaje natural, estadístico t -Student para una y dos muestras independientes, grados de libertad, muestras independientes, media y desviación estándar, la probabilidad para interpretar los valores obtenidos con el estadístico t -Student; (*Nivel 3*) planteamiento de la hipótesis nula y alternativa en lenguaje natural, muestras dependientes e independientes, desviación estándar agrupada, el error estándar, grados de libertad, estadístico t -Student para muestras independientes con $n_1 \neq n_2$ y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ o $n_1 = n_2$ y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, significancia como un límite y regla de decisión intuitiva; (*Nivel 4*) planteamiento de las hipótesis en lenguaje simbólico, regla de decisión, valor-p, valor crítico (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021b).

Además, destacamos procesos de generalización internivel e intranivel; por ejemplo, los procesos de generalización internivel se dan en el nivel 2.2 (ver Figura 1), que considera objetos matemáticos que se pueden aplicar cuando se trabaja con una muestra como el estadístico t -Student y, en cambio, bajo los elementos del nivel 3.1 se puede trabajar con dos muestras que sean dependientes o emparejadas. Asimismo, en el nivel 2.2, se trabaja con el estadístico t -Student, los grados de libertad y la desviación estándar agrupada, sólo cuando $n_1 = n_2$, mientras que en el nivel 3.1, se puede trabajar sin la restricción de la igualdad de los tamaños muestrales, es decir cuando $n_1 \neq n_2$. Un ejemplo de proceso de generalización intranivel, en el uso del estadístico t -Student, se encuentra en el nivel 2.2 al inicio se utiliza para una muestra y posteriormente podemos ver su uso para dos muestras que cuentan con tamaños de las muestras y las varianzas iguales (considerando objetos matemáticos propios de varios significados).

Tabla 2. Resumen de los niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student

Nivel 1	Los indicadores de este nivel se corresponden con un RII, buscan ir más allá de las interpretaciones de los datos y que se realicen conjeturas a partir de la visualización de gráficos (e.g., barras, boxplot, puntos y ojiva) y del tratamiento de los datos mediante técnicas intuitivas (e.g., método de intercomparación y de fluctuación) para argumentar sobre la variación interna de uno o dos grupos de datos.
Nivel 2	En este nivel se destacan los indicadores relacionados con la identificación de la prueba paramétrica apropiada para analizar los datos (e.g., tipo de datos, problema y la lógica de las pruebas con el estadístico t-Student) y con la primera aproximación a las pruebas con dicho estadístico (prueba t-Student de la media de una muestra y prueba t-Student para dos muestras); donde se destaca el estadístico t-Student para una muestra y para dos muestras independientes, la distribución, los grados de libertad, el error estándar e interpretar la probabilidad como una medida de ocurrencia de que la diferencia de las medias se encuentre fuera del rango $\pm t$.
Nivel 3	Este nivel se considera pre formal, pero con un mayor grado de formalidad que el Nivel 2, pues se pueden identificar rasgos tales como el planteamiento de las hipótesis nula y alternativa en lenguaje natural, trabajar y comprender la significancia como indicativo del nivel en el que la posibilidad del efecto debe recibir una consideración seria, y la aplicación de una regla intuitiva para la toma de decisiones. Además, se destacan indicadores que refieren a la generalización y restricciones de las pruebas del estadístico t-Student (muestras dependientes, muestras independientes—MI con $n_1 \neq n_2$, MI con $n_1 \neq n_2$ y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ o con $n_1 = n_2$ y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, y MI con coeficientes de regresión) y las implicaciones que tienen (e.g., estadístico, el error estándar y grados de libertad).
Nivel 4	Los indicadores de este nivel se corresponden con un RIF, con los cuales se busca que el estudiante pueda realizar inferencias y valorarlas basado en la metodología de pruebas de hipótesis. En este nivel destacan indicadores sobre el planteamiento de las hipótesis nula y alternativa con lenguaje simbólico, los niveles de significancia y confianza, las reglas para la toma de decisiones con el valor-p y el valor crítico, dar respuesta al problema en términos del contexto y valorar la inferencia realizada con base en el error tipo I y tipo II y la potencia de la prueba. Es imprescindible destacar, que más allá de los aspectos técnicos es esencial el razonamiento inherente de las pruebas de hipótesis.

Cabe señalar que los niveles de la t-Student han sido experimentados con profesores de matemáticas, en donde se utilizaron para caracterizar el razonamiento inferencial mostrado en sus prácticas y para brindar directrices sobre cómo podrían fortalecer este tipo de razonamiento. Además, en dicho estudio se evidenció la utilidad y validez de la propuesta de niveles (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2022).

Propuesta General de Niveles de Razonamiento Inferencial

A partir de los puntos de encuentro o elementos clave que podemos observar tanto en los niveles para la chi-cuadrada como para la t-Student (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021b), presentados previamente, y de la práctica desarrollada por profesores para resolver problemas sobre estos estadísticos (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021a, 2022), desarrollamos una propuesta de niveles de razonamiento inferencial en términos más generales. Es preciso destacar que esta propuesta requiere que se utilicen matices epistemológicos correspondientes al estadístico que se quiera trabajar.

En la Figura 1 presentamos la propuesta general de niveles de razonamiento inferencial, la cual consta de cuatro niveles progresivos, los indicadores del primer nivel están estrechamente vinculados con un RII, mientras que los de segundo y tercer nivel presentan rasgos tanto de inferencia informal como de inferencia formal, esto se da en distinta gradualidad y los hemos denominado pre formales. Por su parte, los indicadores de cuarto nivel están vinculados con el RIF. En los cuatro niveles se presentan ‘indicadores’ graduables en procesos de generalidad y formalización. Consideramos que esta propuesta podría brindar un ‘camino’ para primero promover un RII en los estudiantes y posteriormente, sobre la base de ese razonamiento los estudiantes puedan construir un RIF. Así, esta propuesta nos permite dar cuenta sobre una transición continua desde un RII a un RIF.

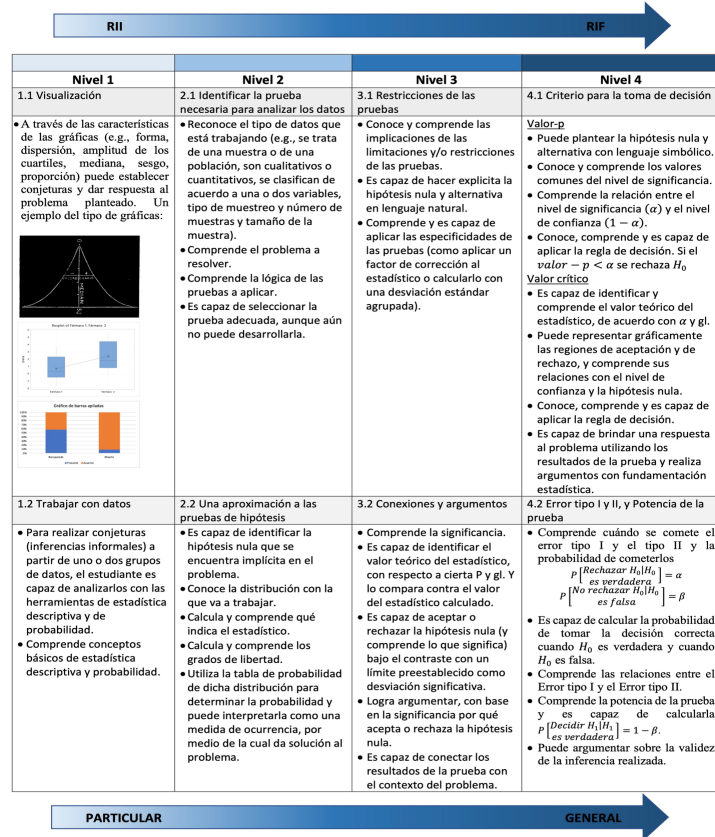


Figura 1. Propuesta general de niveles de razonamiento inferencial

CONCLUSIÓN

Hemos informado parte de un estudio más amplio que estamos llevando a cabo sobre el razonamiento inferencial y su transición de lo informal a lo formal. Para este manuscrito, nos propusimos presentar sucintamente una propuesta de niveles de razonamiento inferencial sobre los estadísticos chi-cuadrada y t-Student y, a partir de dicha propuesta, construir de forma general los niveles progresivos, de lo informal a lo formal, de razonamiento inferencial.

Nuestra propuesta de niveles ha incluido matices epistemológicos de los estudios históricos, para el trabajo con algunas nociones clave de la inferencia, tales como las hipótesis nula y alternativa, el valor-p y la significancia, para las cuales la literatura ha reportado dificultades de estudiantes y/o profesores en su estudio. Por ejemplo, se plantea trabajar en tres momentos con las hipótesis: en un primer momento, se identifica la hipótesis que se encuentra implícita en el problema y se hace explícita por medio de un lenguaje natural; en un segundo momento, se plantean las hipótesis nula y alternativa en lenguaje natural; y en un tercer momento, se trabaja con las hipótesis nula y alternativa en lenguaje simbólico y estadístico. La propuesta de niveles también plantea trabajar la noción de significancia en dos momentos: en el nivel tres, se trabaja con la significancia como indicativo del nivel en el que la posibilidad del efecto debe recibir una consideración seria (como un límite significativo); en el nivel 4, se trabaja con el nivel de significancia, el cual, además de proporcionarle un punto crítico o límite para la toma de decisiones, se puede interpretar como probabilidad de concluir que existe una desviación o diferencia cuando en realidad no existe. También se propone trabajar progresivamente el valor-p en tres momentos: en un primer momento, trabajar con la probabilidad como una medida de ocurrencia en términos del contexto; en un segundo momento, se sugiere relacionar la noción de probabilidad con la de significancia (como límite) y una regla intuitiva para la toma de decisiones; en el tercer momento, se destaca el valor-p como como una medida (probabilidad) de que el valor del estadístico calculado sea posible dada la hipótesis nula y el uso que se le otorga junto con el nivel de significancia en la regla para la toma de decisiones. Trabajar estas nociones en los momentos propuestos podría ayudar en la comprensión, de forma progresiva, tanto del valor-p, de las hipótesis y la significancia como de los diversos conceptos y propiedades que se encuentran involucradas en las pruebas de hipótesis.

Consideramos que los niveles de razonamiento inferencial propuestos pueden ser utilizados como predictores del razonamiento inferencial en diversos momentos de la enseñanza y los estimamos como una herramienta útil para la planeación de clases y el diseño de tareas que permitan promover un razonamiento inferencial de forma progresiva, desde lo informal a lo formal. Finalmente, la propuesta de niveles, que se realizó en términos más generales, es una primera aproximación a una propuesta de niveles de razonamiento inferencial, los cuales podrán ser ampliados o complementados, por ejemplo, con el estudio de otros estadísticos como los estadísticos de prueba z y F y de las pruebas de hipótesis a los intervalos de confianza, así como de otras nociones clave de la inferencia.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco del Proyecto Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

REFERENCIAS

- Bakker, A., Kent, P., Derry, J., Noss, R., y Hoyles, C. (2008). Statistical inference at work: Statistical process control as an example. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 130–145. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.473>
- Batanero, C., Vera, O. D., y Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de psicología en la comprensión del contraste de hipótesis. *Números*, 80, 91–101.
- Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., y Zieffler, A. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355. <https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38–43.
- Lugo-Armenta, J. G., y Pino-Fan, L. R. (2021a). Inferential reasoning of secondary school mathematics teachers on the chi-squared statistic. *Mathematics*, 9(19), Article 2416. <https://doi.org/10.3390/math9192416>
- Lugo-Armenta, J. G., y Pino-Fan, L. R. (2021b). Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student. *Bolema*, 35(71), 1776–1802. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25>
- Lugo-Armenta, J. G., y Pino-Fan, L. R. (2022). Razonamiento inferencial de profesores de matemáticas de enseñanza media sobre el estadístico t-Student. *Uniciencia*, 36(1), 1–29. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.25>
- Lugo-Armenta, J. G., Pino-Fan, L. R., y Ruiz, B. (2021). Chi-square reference meanings: A historical-epistemological overview. *Revemop*, 3, Article e202108. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202108>
- Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105. <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>
- Makar, K., y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Bases curriculares 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf
- Pfannkuch, M., Arnold, P., y Wild, C. J. (2015). What I see is not quite the way it really is: Students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 343–360. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1>
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40–58. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469>