

LOS OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO: SU INCIDENCIA DESDE LOS LIBROS DE TEXTO

OBSTACLES IN THE LEARNING OF PROBABILISTIC KNOWLEDGE: INFLUENCE FROM THE TEXTBOOKS

ANA SERRADÓ
Profesor E.Secundaria
ana.serrado@uca.es

JOSÉ M^a CARDEÑOSO
Universidad de Granada
josem@ugr.es

PILAR AZCÁRATE
Universidad de Cádiz
pilar.azcarate@uca.es

RESUMEN

En este trabajo reinterpretemos en términos de obstáculos (epistemológicos, cognitivos y didácticos) algunos de los sesgos, heurísticos, falacias y paradojas que surgen al asignar probabilidades a fenómenos aleatorios y que han sido descritos por las investigaciones en el campo. En segundo lugar, se presenta un análisis de las unidades dedicadas al “Tratamiento del Azar” en una muestra de libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria (de 12 a 16 años) con la finalidad de mostrar algunos posibles obstáculos que puede inducir la presentación de este conocimiento en dichos textos. Todo ello con el objetivo de aportar criterios en la elaboración de los libros de texto que tengan en cuenta las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad. Nota: Un resumen extenso en Inglés se incluye al comienzo de este artículo, que está escrito en Español.

Palabras clave: *Investigación en educación estadística; Educación secundaria Obligatoria; Obstáculos probabilísticos; Libros de texto*

ABSTRACT

In this work we first reinterpret, using the idea of (epistemological, cognitive and didactical) obstacle some biases, heuristics, fallacies and paradoxes that arise in assigning probabilities to random phenomena, and have been described in previous research. We then reflect on the way obstacles should be taken into account in the process of teaching and learning probability. Thirdly, we analyse some didactic units related to “Dealing with chance” in a sample of Compulsory Secondary Education Spanish’s textbooks (12 to 16 year-old students) to show some possible obstacles that might be induced by the presentation of this

knowledge in the books. The final aim is providing some criteria to elaborate new textbooks that take into account research on probability education. Note: An extended summary in English is provided at the beginning of this paper, which is written in Spanish.

Keywords: *Statistics education research; Compulsory Secondary Education; probability obstacles; textbooks*

EXTENDED SUMMARY

In this paper we present and analyse some possible epistemological, ontogenical and didactical obstacles, which might be introduced to children from the way some textbooks develop the probabilistic content.

In the first section of the paper, starting from Brousseau's (1983) description of obstacles, we reinterpret some of the difficulties found in the historical development of probability or that have been described in previous research on probabilistic reasoning in terms of three types of obstacles:

1. Epistemological obstacles, which are usually identified from the historical analysis, since they coincide with difficulties that arose in the development of the subject. In our work we are focussing on some epistemological obstacles related to the ideas of chance, randomness and probability.
2. Ontogenetic obstacles, which are related to children's cognitive development. We have reinterpreted, in terms of obstacles, some well known research on the understanding of the following basic probabilistic notions: simple and compound events, equiprobable outcomes and independent events. From our point of view ontogenetic obstacles are also reflected in the reasoning strategies that children use in uncertain situations, such as the "outcome approach", the representativeness heuristic; the gambler's fallacy and the equiprobability bias.
3. Didactic obstacles, which are related to the way a topic is taught. In our research we focus on two types of didactic obstacles: inappropriate use of probabilistic language, and the contexts used for exemplification and experimentation.

In the second section of the paper we describe the research design. We carried out a content analysis of the lessons dealing with Chance and Probability in a sample of textbooks aimed at pupils in Spanish Compulsory Secondary Education (12 to 16 year-old students). This sample included the full set of textbooks (through the different educational levels from 12 to 16 years) of four Spanish series of wide diffusion (20 books in total). For each of the textbooks we analysed the definitions, explanations, examples and activities included for two main topics: a) chance and randomness and b) probability.

Results are presented in the third section of the paper, where we characterise some possible epistemological, ontogenical and didactical obstacles, giving examples of definitions and examples presented in the textbooks that we analysed in our research and that support our analysis. These results are summarised in Tables 1 and 2. We identify the four series with the letters B, S, G, M in these tables.

The analysis and comparison of these textbooks led us to conclude that chance is modelled in these textbooks basically as synonymous with luck and randomness, and it is related with the uncertainty of the event only. These characterizations are insufficient to completely understand the meaning of probability. The opposition to determinism emphasizes the cause and effect relationships that, in turn, might produce biases in the correct interpretation of dependent and independent events.

Table 1. Treatment of chance and randomness and possible obstacles induced

Concept	Presentation in the textbooks	Obstacles that might be induced by the way the topic is presented	Type of obstacle
Chance	Chance is presented as synonymous of unknown cause (B, S, G, M). There is only one characterisation.	Restricting the type of phenomena that can be studied in probability	Epistemological
Random Experiment	Presenting random experiment as anything unpredictable (B, S, G, M).	Restricting the wide meaning of random experiment	Epistemological
Deterministic Experiment	Presenting determinist experiment as anything predictable (B, S, G, M). Emphasis in cause-effect relationship (B, S, G, M).	Inappropriate understanding of uncertainty and cause-effect No distinction between chance and causality	Epistemological Ontogenic
Process / Event	No distinction between random process and outcome (B, S, G, M).	No distinction between compound experiment and repeated trials of the same experiment Non distinction between simple/compound event and experiment	Ontogenical
Sample space / outcome	Introducing sample space from the set notion, which is not clarified (B, S, G, M-3 ^o -4 ^o). Presenting only activities and examples associated with random generators in the context of chance games (S, G).	Misunderstanding of reasons for some assignments of probability Blocking transference to other contexts	Ontogenic Didactical
Random sequence	Lack of experience with random sequences, (B, G).	Favouring the use of heuristics	Didactical

Secondly, the examples and activities included in the textbooks are most of the times associated with random generators for finite sample spaces and equally likely outcomes. These examples facilitate the determination of the sample space, but they can block later generalization to sample spaces in daily life contexts and also hide the multiple applications of probability calculus. Moreover, in spite of the fact that these examples and activities provide a good opportunity to discuss the equiprobability of events, this is not requested in the textbooks. This lack of discussion favours the identification of equiprobability with equi-ignorance and may constitute an obstacle in favouring equiprobability bias.

Thirdly, these textbooks do not clarify the meaning of terms such as unforeseeable, set, certain, impossible, convergence, etc., to which children might assign inappropriate meaning and thus block the construction of some probabilistic notions which are described by the said terms, such as: random experiment, event and process, sample space, random sequence, stability of relative frequencies.

Table 2. Treatment of probability and possible obstacles induced

Concept	Presentation in the textbooks	Obstacles that might be induced by the way the topic is presented	Type of obstacle
Probability (Frequentist view)	No reflection on the meaning of stochastic convergence in analysing the stability of the relative frequencies (B, S, G, M).	Expecting convergence in small samples	Ontogenical
	Introduction, stability of relative frequencies only at theoretical level, (B, S).	Representativeness heuristics	Didactical
Comparison of Probabilities	Quantifying and assigning probabilities only from comparison of specific random generator (roulettes) (B, S).	Associating the generator to the strategy to assign probabilities	Didactical
Equiprobability	Circularity in defining equiprobability (B ^o , G) Taking equiprobability for granted (B).	Equiprobability bias	Epistemological
Dependence and independence	Activities and examples associated to sampling with /without replacement, (B, S, G, M).	Non transfer to other contexts	Didactical

Finally, the introduction of the frequentist notion of probability in the textbooks is based on the idea of stochastic convergence, which is not discussed at these educational levels; however, an intuitive understanding is taken for granted. These textbooks include neither examples nor activities that could enable the students to become aware of their misconceptions about the occurrence of chance in random series, which appear in form of heuristics (the gambler's fallacy, representativeness of the sample misconception, "outcome approach", etc.).

LOS OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO: SU INCIDENCIA DESDE LOS LIBROS DE TEXTO

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de los libros de texto es una forma de aproximarse al estudio de los difíciles y complejos procesos de enseñanza y aprendizaje del conocimiento probabilístico, como muestran los trabajos de Malara (1989), Ortiz (1999), Ortiz y Serrano (2001), Serradó (2003), Serradó y Azcárate (2003). Trabajos que nos aportan antecedentes sobre la descripción de los conceptos probabilísticos propuestos en los libros de texto y las actividades que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este artículo completamos dichas investigaciones con relación a los posibles obstáculos (en el sentido de Brousseau), a los que se puede enfrentar el alumno durante este proceso de enseñanza y aprendizaje.

En la primera sección del artículo, desde la descripción de la noción de obstáculo (Brousseau, 1983), reinterpretemos en términos de obstáculo epistemológico, ontogénico

o didáctico, algunas de las dificultades descritas en los estudios históricos o investigaciones sobre razonamiento probabilístico, en relación con el aprendizaje de las diferentes nociones que se desarrollan en los proyectos curriculares españoles. A continuación, tras una breve descripción de las características del diseño metodológico utilizado, presentamos un análisis de las unidades dedicadas al “Tratamiento del Azar” en una muestra de libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria (de 12 a 16 años) con la finalidad de mostrar algunos posibles obstáculos que puede inducir la presentación de este conocimiento en dichos textos. Finalizamos con unas reflexiones en torno al contraste entre los obstáculos en la construcción del conocimiento probabilístico y las propuestas de los libros de texto.

2. OBSTÁCULOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO

La noción de obstáculo utilizada en este artículo se basa en las consideraciones aportadas por Brousseau (1983), para quien esta noción se relaciona con aquel conocimiento que ha sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente resulta inadecuado, y difícil de adaptarse, cuando el alumno se enfrenta a problemas nuevos.

Un conocimiento puede ser considerado como obstáculo cuando es elaborado como fruto de la interacción del alumno con su medio y, en esa situación, produce un resultado “interesante” y “útil”, aunque no válido ni adecuado. Brousseau (1983) considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden tener diferentes orígenes: epistemológico, didáctico u ontogénico.

Los obstáculos *epistemológicos* se identifican a partir de las investigaciones sobre Historia de la Ciencia y los procesos de construcción de los conocimientos, los *ontogénicos* a partir de la revisión de las investigaciones sobre el aprendizaje de estas nociones y los *didácticos*, se extraen de las investigaciones sobre el “Tratamiento del Azar” en el aula. Aunque Brousseau describe estas tres categorías separadas, a veces es difícil determinar si un cierto obstáculo de tipo epistemológico no tiene también un carácter ontogénico o bien los obstáculos epistemológicos y ontogénicos se reproducen siempre en un sistema didáctico y, por tanto, también se pueden configurar como obstáculos de carácter didáctico.

A continuación tratamos de aplicar estas ideas describiendo algunos posibles obstáculos asociados a las nociones probabilísticas que se recogen en el currículum escolar español para alumnos de 12 a 16 años (Decreto 106/1992) y que, a su vez, se incluyen en los libros de texto de la muestra.

2.1. OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

El análisis de los estudios de evolución histórica del conocimiento probabilístico llevados a cabo por diferentes autores nos ha permitido identificar los obstáculos que se han ido superando a la hora de caracterizar las nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad, que resumimos a continuación.

La noción de azar Son muchos los análisis filosóficos y didácticos de la noción de azar y su relación con la aleatoriedad (por ejemplo, Azcárate, 1995 o Bennett, 1993; 2000). La clarificación del significado de la noción de azar ha pasado por diferentes

etapas significativas, en las que se buscaban diferentes explicaciones para los fenómenos indeterminados (Discursos del azar, según Azcárate, 1995).

Desde el *Discurso del orden*, característico de las primeras civilizaciones, el azar es entendido como causa desconocida, es el que ocasiona sucesos inesperados o “extraños”, y el que se asocia con el desorden inicial (Caos) que a veces surge a través de fuerzas incontroladas de origen mágico o divino.

Ya en la época grecorromana, impera el *Discurso del Azar/Necesidad*, según el cual el azar, que sigue siendo algo desconocido, es explicado como un simple reflejo del cruce inesperado de un conjunto de hechos que son producto de series causales independientes.

La existencia de la incertidumbre en otros momentos de la historia se explicó también desde el poder de la *Providencia*, que garantiza el orden y la armonía del Universo. El “azar” surge como reflejo de la voluntad de la Divina Providencia, como un hecho inexplicable para el ser humano, idea que se mantiene hasta nuestros días.

La progresiva separación de las explicaciones religiosas y científicas de los fenómenos hace concluir la aparición de un nuevo discurso del Azar, el *Discurso de la Ignorancia*. El “azar” era producto de la ignorancia humana a la hora de analizar científicamente ciertos acontecimientos de la Naturaleza través de leyes causales y deterministas. Según esta concepción no hay “azar” realmente, no existe el azar en sí mismo, es nuestra ignorancia lo que nos hace recurrir a él.

Poincaré (1979), en una búsqueda de una noción de “azar” que significase algo más que la ignorancia humana, describió tres tipos de sucesos cuyo comportamiento era atribuido al azar. En primer lugar, sucesos que pueden estar producidos por causas insignificantes, que se nos escapan perceptivamente, pero que determinan un efecto considerable. En segundo lugar, sucesos en que lo importante no es la pequeñez de las causas que lo provocan, sino la complejidad de todas las interacciones entre ellas. En tercer y último lugar, la limitación de los sujetos para describir todas las partes del Universo, que obliga a razonar de forma aislada, considerando sólo los aspectos directamente implicados.

El reconocimiento de estas posibles categorizaciones del azar hace que se conforme un último *Discurso de la Complejidad*, en el que caracteriza el “azar” como elemento provocador de la complejidad existente en la realidad, donde su significación puede estar ligada a un carácter más ontológico.

La noción de aleatoriedad La aleatoriedad, en sí misma, es un concepto complejo; Ayton, Hunt y Wright (1989) describen la variedad de criterios que utilizan los individuos para determinar si una cierta secuencia es aleatoria o no. Nosotros utilizaremos la visión de Kyburg (1974), quien propone la caracterización de la noción de aleatoriedad a partir de cuatro elementos independientes: el objeto de estudio, el conjunto que lo acoge, la proposición que determina dicha pertenencia del acontecimiento de la clase, y un cuerpo de conocimiento como referente.

El *objeto de estudio* es el acontecimiento que hay que enmarcar en el estudio e interpretación probabilística y ha tenido una cierta evolución histórica, dependiendo de las diferentes concepciones sobre la probabilidad. En un primer periodo histórico se consideran como objetos los acontecimientos lúdicos. En un segundo periodo, los objetos considerados son los acontecimientos naturales que susciten el interés de los científicos. En un tercer periodo, los objetos son los acontecimientos de la vida cotidiana de orden social, como unas situaciones a estudiar y modelizar.

El paralelismo entre la evolución histórica del significado de los objetos aleatorios, y la capacidad del sujeto en discriminarlos como tales sugiere una posible relación entre los obstáculos epistemológicos en la identificación de los fenómenos (aleatorios), y los

obstáculos ontogénicos asociados a la capacidad de clasificar del sujeto. La superación de dichos obstáculos ha de surgir de un tratamiento didáctico de la noción de fenómeno aleatorio que tenga en consideración la explicación del acontecimiento y su clase de referencia.

La noción de probabilidad Numerosos autores han analizado los obstáculos epistemológicos asociados a la construcción de la noción de probabilidad (Hacking, 1975). En Azcárate (1995) se analizan cuatro etapas diferenciadas en su construcción. En una primera etapa del desarrollo de la idea, que reconocemos como la Prehistoria, donde la idea de probabilidad surge asociada a la noción de juegos de azar, Cardano fue uno de los primeros matemáticos en realizar un argumento teórico para calcular las posibilidades de los distintos resultados relacionados con los juegos de dados. Paralelamente surgieron ideas intuitivas relacionadas con el grado de posibilidad, con algunos cálculos de frecuencias teóricas, sin tener consideración del cuerpo de conocimientos.

En una segunda etapa de *iniciación al cálculo de probabilidades*, se comienza su estudio sistemático, a través, también, de su aplicación al estudio de situaciones de juego ligadas a contextos empíricos. En los textos históricos se suele presentar como la primera sistematización del cálculo de probabilidades de los sucesos la aportada por Pascal y Fermat, relacionándola, muy a menudo, con la *combinatoria*.

Los cálculos probabilísticos empiezan a adquirir consistencia a partir de las aportaciones de Bernoulli. Este autor, estudiando el aparente desorden que presentaban los resultados obtenidos en situaciones de juego, observó una cierta regularidad en la aparición de dichos resultados, y demostró el teorema que se conoce en la actualidad como la *Primera ley de los Grandes Números*. La comprensión incorrecta del significado de la estabilidad de las frecuencias, común en los adultos, se refleja en una transferencia de dicha ley a muestras pequeñas, esperando que se cumpla con un número limitado de pruebas (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Dicho razonamiento se basa en la creencia de que el azar funciona como un mecanismo auto-correctivo en el que una desviación en una dirección es rápidamente equilibrada por una desviación en la dirección contraria (Falk y Konold, 1992; Bennett, 2000). Esta consideración incorrecta supone un obstáculo epistemológico y ontogénico que dificulta la comprensión de la noción de probabilidad.

En una tercera etapa aparecen dos perspectivas diferenciadas. Una primera perspectiva, la frecuencial, que atenderá el estudio de las frecuencias relativas, y otra, la bayesiana, que se presentará más relacionada con los grados de credibilidad y sus necesarios ajustes con la realidad. Y una última etapa, correspondiente a la introducción de una *Teoría Axiomática*, la construcción de la medida se realiza con independencia de la interpretación real a la que se preste cada situación, aportando un soporte axiomático-deductivo a la teoría matemática (Kolmogorov, 1950). Se entra en la fase de asimilación de los avances teóricos y el posterior desarrollo de aplicaciones.

El análisis de la evolución histórica del cálculo de probabilidades ha permitido identificar los obstáculos que se han superado hasta convertirse en ciencia, así como la dificultad de caracterizar las nociones de azar, aleatoriedad y probabilidad.

2.2. OBSTÁCULOS ONTOGÉNICOS

En las siguientes páginas, presentamos una interpretación de las investigaciones más relevantes sobre la comprensión de las nociones básicas probabilísticas y las estrategias de razonamiento que, en términos de obstáculos ontogénicos, utilizan los sujetos al otorgar significado a dichas nociones.

Obstáculos asociados a la comprensión de las nociones básicas Los obstáculos ontogénicos son descritos en algunas investigaciones sobre desarrollo del razonamiento probabilístico. Por ejemplo, Hoemman y Ross (1982) establecen que los niños, antes de los seis años, no tienen bien definida la relación causa-efecto y, en consecuencia, no diferencian las nociones de azar y causalidad. Es más, Inhelder y Piaget (1985, p. 91) argumentan que:

...en el nivel preoperatorio, ante el azar los sujetos presentan una actitud paradójica: esperan que frente a condiciones semejantes los fenómenos se repitan de modo idéntico.

En un principio el niño se desorienta ante lo inesperado o fortuito, pero luego, progresivamente, busca causas que justifiquen “más o menos” las fluctuaciones encontradas, lo que les lleva a buscar razones ocultas para los hechos de un cierto orden oculto; por ejemplo, cuando esperan una cierta compensación en la aparición de los posibles resultados esperados, como una autorregulación de los resultados.

A este respecto, Bennett (2000, p. 13) indica que:

Las ideas intuitivas sobre el azar pueden preceder a las ideas formales y, si son correctas, pueden ser de gran ayuda en el aprendizaje; pero en caso contrario, pueden llegar a dificultar la correcta comprensión de los conceptos.

En consecuencia, pensamos que la no-inclusión de esta noción en la enseñanza puede suponer un obstáculo didáctico en la construcción de la noción de probabilidad, ya que ésta se sustentará en ideas intuitivas que no permitirán comprender la naturaleza de los fenómenos a los que se enfrentan.

Fischbein, Nello y Marino (1991), destacan las dificultades de los sujetos en la comprensión de las nociones de suceso simple y compuesto, que puede ser un obstáculo para la posterior comprensión de las nociones de sucesos equiprobables, sucesos contrarios y sucesos independientes.

La distinción entre sucesos equiprobables o no, se puede presentar de dos formas diferentes. Una primera puede provenir de una hipótesis que establezca el sujeto sobre la simetría del azar, igualdad de oportunidades o posibilidades de ocurrencia del suceso. Una segunda, que apela a un juicio no cuantitativo de la equiprobabilidad, en relación exclusivamente con su carácter fortuito. La subjetividad asociada a la determinación de la simetría o equidad del azar puede ser un obstáculo para la determinar si dos sucesos son equiprobables. Es más, dicha subjetividad favorece la aparición del llamado sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre y Duran, 1988), en el que los sujetos consideran los posibles resultados de cualquier fenómeno equiprobables porque son materia del azar.

Los sujetos también presentan dificultades en la determinación de si dos sucesos son independientes y, en consecuencia, en la construcción del significado de la noción de independencia estocástica. Truran y Truran (1996) analizan el concepto de independencia, indicando que es diferente considerar sucesos aleatorios que pruebas aleatorias e indican la necesidad de dos caracterizaciones diferentes con la finalidad de no generar un obstáculo didáctico. Por una parte, se debe introducir el significado de independencia clásica, mediante la regla del producto, y por otra, reflexionar sobre la independencia de la prueba, que refleja que los resultados de una prueba aleatoria no están influenciados por los resultados de cualquier otra prueba del mismo generador aleatorio. El reconocimiento de la dependencia clásica necesita de la distinción de sucesos excluyentes. En el mundo real los sucesos mutuamente excluyentes no son

necesariamente sucesos complementarios, lo cual provoca una confusión en el sujeto (Sánchez, 1999). El obstáculo podría surgir en el momento en que el sujeto debe realizar argumentaciones para determinar las posibles pertinencias a ciertas clases que generan los sucesos aleatorios.

Obstáculos asociados a las estrategias de razonamiento Entre las investigaciones relacionadas con las estrategias de razonamiento que utilizan los sujetos ante situaciones de incertidumbre citamos las realizadas por Konold (1995). Konold usa el término “outcome approach” para referirse a los razonamientos de los sujetos que obvian en el marco global de decisión la serie aleatoria y evalúan en función del resultado siguiente, cuando se encuentra bajo condiciones de incertidumbre.

Es significativo el conjunto de investigaciones relativas al heurístico de la *representatividad* (Tversky y Kahneman, 1982). Los sujetos consideran que un resultado debe ser representativo de la población que proviene, es decir, representativo del conjunto de características o cualidades sobre los que se trabaja. Según Cardeñoso (2001), la enseñanza reafirma esta creencia y no elimina sus sesgos, configurándose no sólo como un posible obstáculo ontogénico, sino como uno didáctico, que no facilita la comprensión de las situaciones dominadas por la incertidumbre.

Relacionado con el uso del heurístico de la representatividad, están las argumentaciones basadas en la *falacia del jugador*. Esta falacia se fundamenta en una idea errónea sobre la imparcialidad de las leyes del Azar. Esta falacia se puede constituir en un obstáculo en la comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas, al considerar que la estabilidad se puede dar en series limitadas de números.

En último lugar, en las investigaciones se reafirma la importancia del *sesgo de la equiprobabilidad*, ya introducido con anterioridad. Bajo este sesgo los sujetos consideran los posibles resultados como equiprobables porque son materia del azar. Este sesgo se constituye como un obstáculo para la comprensión de noción de aleatoriedad, que reduce su significado a argumentaciones basadas en la equiprobabilidad de los sucesos.

2.3. OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS

El análisis de los obstáculos de carácter didáctico que presentamos se centra en dos aspectos de la construcción del conocimiento: uno relacionado con el uso del lenguaje probabilístico, y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento.

Obstáculos asociados con el uso del lenguaje probabilístico La importancia del lenguaje en la construcción del conocimiento probabilístico se refleja en los diferentes diseños curriculares. En los trabajos de la Comisión Internacional IREM para la enseñanza de la probabilidad y la estadística en Francia, se sugiere que:

Conviene precisar el vocabulario, de forma que a cada nivel de descripción se asocien términos específicos que permitan a los alumnos tener en cuenta el punto de vista en que nos situamos: realidad, sentido, sensible, modelo, modelo probabilista (Henry, 2001, p. 164).

Todas estas recomendaciones son importantes puesto que, cuando el alumno se inicia en el estudio de la probabilidad, ha usado en sus juegos y vida diaria términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios que, con frecuencia, no tienen el mismo sentido preciso que adquieren en el “Tratamiento del Azar” (Ortiz y Serrano, 2001). Estas diferencias existentes entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje probabilístico pueden ser

un obstáculo para la construcción del conocimiento. Por ejemplo, las investigaciones de Truran (1994) sugieren que muchos niños confunden los términos “imposible” y “muy poco probable”. Lo que resulta problemático no son los términos imposible, seguro,... en sí mismos, sino los conceptos y procesos subyacentes que se están comunicando y el significado que transmiten.

Batanero y Serrano (1999) indican que la introducción de la idea de *aleatoriedad* se hace preferentemente de un modo descriptivo, cobrando un papel primordial los matices de lenguaje. La descripción de las características atribuidas a los resultados de los experimentos se realiza mediante palabras como imprevisibles, incierto, etc., con las que se pretende que se evoquen las propiedades de tales fenómenos, pero cuyo significado no suele clarificarse. La falta de clarificación de la noción de aleatoriedad deja abierta la posibilidad de interpretación ambigua, y se puede configurar como un obstáculo en la comprensión de la noción de aleatoriedad por parte de los alumnos. Esta idea indica que un tratamiento inadecuado de la forma de contextualizar y referenciar los objetos (acontecimientos, fenómenos, experimentos aleatorios,...) puede ocasionar un obstáculo didáctico en la comprensión de la noción de aleatoriedad y probabilidad.

Por otro lado, en la enseñanza de las matemáticas se pueden encontrar tres tipos diferentes de palabras (Pimm, 1987):

- Palabras técnicas, que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano.
- Términos que aparecen en matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, como límite o convergencia.
- Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos.

En el caso de la enseñanza de la probabilidad en niveles no universitarios, la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías aunque, si el niño no está muy familiarizado por el uso, muchas de las palabras de la tercera categoría se convertirán en términos de la segunda, lo que podrá crear dificultades de comunicación en el aula.

Obstáculos asociados a la experimentación y ejemplificación Heitele (1975) indica que las posibilidades didácticas que se deducen de las experiencias empíricas son más limitadas de lo que sugieren los textos escolares. Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente. Debido, a su carácter aleatorio, puede ocurrir que no se obtenga el resultado deseado cuando se quiera mostrar con una simulación una cierta probabilidad.

Con referencia a los generadores aleatorios, que generalmente se utilizan para introducir las nociones de probabilidad, se observa que una ruleta visualiza mejor la relación parte-todo, y por tanto la Regla de Laplace, y además, permite al alumno utilizar consideraciones de tipo geométrico. Las chinchetas permiten ejemplificar situaciones de sucesos no equiprobables. Las barajas, urnas o bolsas con bolas permiten trabajar situaciones de muestreo con y sin remplazamiento, facilitando la determinación de la probabilidad para sucesos dependientes e independientes, que no es fácil ejemplificar con otros dispositivos (Ortiz y Serrano, 2001). El uso exclusivo de uno de estos instrumentos al introducir una noción, puede favorecer una asociación del dispositivo con el concepto a aplicar, sin favorecer el aprendizaje significativo de las propiedades de los mismos (Azcárate, 1995; Serradó, 2003).

La revisión anterior sobre algunos posibles obstáculos en la construcción del Conocimiento Probabilístico presentada en esta sección se configura como un referente teórico para el análisis de su tratamiento en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria.

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación se enmarca en un estudio más amplio (Serradó, 2003; Azcárate, Cardeñoso, y Serradó, 2003) que analiza el contenido de las unidades dedicadas al “Tratamiento del Azar” en los libros de textos de Educación Secundaria Obligatoria en España (de 12 a 16 años). El presente artículo, presenta los resultados relacionados con el análisis de los obstáculos epistemológicos, ontogénicos y didácticos, que se pueden inducir desde los libros de texto a la hora de desarrollar los contenidos probabilísticos.

Este estudio presenta diferentes niveles de reflexión, un primer análisis del contenido de los libros de texto, centrado en la descripción de cada uno de los posibles obstáculos en relación con las nociones consideradas previamente en los libros de la muestra. Un segundo análisis explicativo que surge del contraste entre los resultados provenientes del análisis anterior y el marco teórico elaborado. Al ser una investigación cualitativa, hemos considerado una muestra intencional de libros de texto, que ha sido seleccionada desde un perfil de atributos a cumplir. Se han buscado editoriales con distribución en Andalucía, que traten el azar a lo largo de todos los cursos de la etapa y tengan desarrollado el proyecto curricular en las tres etapas de Educación no universitaria. La tabla 1 recoge los atributos que cumplen los libros de texto de la muestra.

Tabla 1. Atributos de los textos de la muestra

Atributos	Santillana	Bruño	Guadiel	McGraw Hill
Alta incidencia en el mercado nacional	SI	SI	SI	SI
Alta incidencia en el mercado andaluz	SI	SI	SI	SI
Impresión en Andalucía	NO	NO	SI	NO
Tratamiento del Azar longitudinal	SI	NO	NO	SI
Proyecto curricular de las tres Etapas	SI	SI	NO	NO

En cada uno de los textos se identificaron las explicaciones, ejemplificaciones y actividades que utilizaban para tratar cada una de las nociones consideradas (aleatoriedad y probabilidad), se organizó la información y se procedió a su análisis.

En la siguiente sección se presentan los resultados correspondientes a la caracterización de los posibles obstáculos epistemológicos, ontogénicos y didácticos que pueden inducir en su tratamiento los libros de texto, en función del marco teórico elaborado.

4. TRATAMIENTO DE LOS OBSTÁCULOS EN LOS LIBROS DE TEXTO

4.1. NOCIÓN DE ALEATORIEDAD

Con referencia a la *noción de aleatoriedad*, ninguno de los libros de texto analizados introduce una sección dedicada al estudio de dicha noción, sino que se refieren en diferentes apartados a nociones relacionadas como azar, fenómeno y/o experimento aleatorio, proceso y suceso, serie aleatoria, etc.

Azar Ninguno de los libros de texto presenta una sección dedicada al estudio de la noción de azar. Se presentan referencias implícitas al significado que adquiere dicha noción, a partir de la presentación de textos y actividades de motivación. En estos textos y actividades se caracteriza el azar como una causa desconocida, otorgándole un significado mágico, asociado a la suerte y un carácter causal asociado a la imprevisibilidad del fenómeno. Dicha caracterización identifica el azar, como el reflejo de una causa desconocida, y dificulta su caracterización como un elemento provocador de

la complejidad existente en la realidad (Azcárate, Serradó y Cardeñoso, 2004). A este respecto, Bennett (2000, p. 13) indica que:

Las ideas intuitivas sobre el azar pueden preceder a las ideas formales y, si son correctas, pueden ser de gran ayuda en el aprendizaje; pero en caso contrario, pueden llegar a dificultar la correcta comprensión de los conceptos.

En consecuencia, pensamos que la no-inclusión de esta noción en la enseñanza y la falta de reflexión sobre su significado, puede favorecer la aparición de un *obstáculo epistemológico* para la comprensión de las nociones de aleatoriedad y probabilidad, ya que éstas se sustentarán en ideas intuitivas que no permitirán comprender la naturaleza de los fenómenos a los que se enfrentan. Y, en la misma línea puede reflejar suponer un *obstáculo didáctico* ya que es una situación producto de decisiones docentes.

Fenómeno y experimento Los libros de texto de las diferentes editoriales realizan un uso indiferenciado de las nociones de fenómeno y/o experimento, que se puede observar en los dos siguientes ejemplos:

Podemos predecir, con toda seguridad, lo que va a ocurrir: se trata de fenómenos o experimentos deterministas (Bruño, 4º A ESO, pág. 266).

El lanzamiento de un dado, de una moneda, el giro de la ruleta o la extracción de una bolsa son experimentos en los que no se puede predecir el resultado que se va a obtener. Se llaman experimentos aleatorios y su resultado depende del azar (Santillana, 1º ESO, pág. 248).

Las cuatro editoriales de la muestra definen el experimento aleatorio a partir de la imposibilidad de predecir el resultado. Por ejemplo:

En estos casos no podemos conocer previamente el resultado de las experiencias, que reciben el nombre de experimentos aleatorios (Guadiel, 2º ESO, pág. 128).

La presentación de una única modelización puede inducir un obstáculo para la comprensión del amplio significado de esta noción, y un obstáculo epistemológico en la posterior comprensión de la noción de probabilidad, tal como se ha argumentado en la sección anterior.

Las definiciones de *experimento determinista* propuestas en las cuatro editoriales están relacionadas todas con la posibilidad de predecir a priori el resultado, como contraposición a la definición de experimento aleatorio propuesto. La presentación de ambas nociones como antagónicas puede suponer un *obstáculo epistemológico* en la comprensión adecuada de las situaciones dominadas por la incertidumbre y en relación al significado de causa-efecto (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2005). Este tipo de obstáculos se puede manifestar en forma de sesgos asociados al determinismo de los fenómenos, que surgirán en un intento de delimitar si ciertos fenómenos dependen o no de la incertidumbre.

Las editoriales Bruño y Santillana presentan básicamente actividades de carácter conceptual asociadas al reconocimiento de los experimentos aleatorios y/o deterministas. Las actividades de las editoriales Guadiel y McGraw Hill permiten analizar las diferentes propiedades definitorias de los fenómenos. Por ejemplo:

Cuando llegas a un semáforo: ¿De qué color estará? ¿De qué depende? ¿Qué es más fácil que esté: rojo, amarillo o verde? (Mc Graw Hill, 2º ESO, pág. 249, act. 7).

Tanto en el nivel de introducción de las nociones teóricas, como en el tipo de actividades propuestas, se favorece el uso descriptivo del lenguaje para incidir en la caracterización de las diferencias existentes entre los fenómenos/experimentos aleatorios o deterministas. En este sentido, la falta de un vocabulario adecuado o el uso inadecuado de éste puede ocasionar un *obstáculo ontogénico* en la comprensión del significado de la noción de experimento aleatorio.

Proceso y suceso aleatorio El análisis del contenido de los libros de texto refleja que, en general, no se enfatiza el estudio de las diferencias entre las nociones de proceso y suceso aleatorio. La falta de distinción de estas nociones se puede configurar en un obstáculo ontogénico en la construcción de las nociones de suceso en el experimento simple y en el experimento compuesto (Fischbein, Nello y Marino, 1991). A su vez, la consideración de estas diferencias puede ser esencial para la posterior comprensión de las nociones de experimento compuesto y serie aleatoria, básica para el estudio de la noción frecuencial de la probabilidad (Azcárate, Serradó y Cardeñoso, 2004).

Sucesos elementales y espacio muestral En los textos se define la noción de espacio muestral a partir del uso del término conjunto, que no se clarifica, como se observa en la siguiente definición del texto de la editorial Bruño:

El espacio muestral es el conjunto de todos los sucesos elementales, y se designa por la letra E (1º de ESO, pág. 238).

Esta falta de clarificación puede configurar un obstáculo ontogénico para la comprensión del espacio muestral, siguiendo la línea argumental de la sección anterior. Una mayor comprensión de su significado se podría obtener del análisis de las ejemplificaciones y actividades propuestas en el texto. Dichas ejemplificaciones y actividades se reducen a la identificación de los sucesos que lo componen; por ejemplo la actividad propuesta por la editorial Santillana:

Se lanzan dos dados. ¿Es éste un experimento aleatorio? En caso afirmativo escribe el espacio muestral (4º B de ESO, pág. 264).

Salvo en excepciones, los textos presentan todas las ejemplificaciones y actividades asociadas a la identificación de espacios muestrales de experimentos asociados a generadores aleatorios particulares, que facilitan su determinación y cuantificación, ya que la repetición de los lanzamientos puede imaginarse de forma más rápida (Meletiou y Stylianou, 2003). Sin embargo, la reducción de los contextos de ejemplificación y experimentación puede ser un *obstáculo didáctico* para la transferencia de dichas nociones a otros contextos, como el social, en que los espacios muestrales no son tan explícitos, y no siempre se comprenden correctamente.

Serie aleatoria En los libros de textos se utiliza el término de serie aleatoria para caracterizar las secuencias de sucesos aleatoria, por ejemplo:

Los resultados se han anotado en una tabla de recuento que te presentamos a continuación, en series de 20, 40, 60, 80 y 100 lanzamientos... (McGraw Hill, 3º).

En relación con la noción de serie aleatoria, no se proponen, en general, actividades en que los alumnos tengan que reflexionar sobre su significado, ni se enfrenta a los alumnos con situaciones en que tengan que verbalizar el uso de heurísticos como la falacia del jugador. Este uso del término serie, sin conceptualizarlo, genera una pobre imagen de la noción y puede conllevar posibles *obstáculos didácticos* al asociarlo a secuencias aleatorias muy poco representativas de la potencialidad de la noción de serie aleatoria (o/y de su convergencia), con las consecuencias posteriores para la visión frecuencial. En el caso de que los textos sean las únicas fuentes de información a la hora de planificar y desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje, podría suceder que las argumentaciones de los alumnos estuviesen dominadas por el uso de heurísticos, convirtiéndose en un sesgo para la adecuada comprensión del significado de la probabilidad, y de la probabilidad condicionada.

A modo de síntesis en la Tabla 2 hemos recogido el tratamiento reflejado en los libros de las diferentes nociones y la naturaleza del obstáculo que dicho tratamiento puede inducir.

Tabla 2. Posibles obstáculos desde el tratamiento de la noción de aleatoriedad

Noción analizada	Tratamiento en los libros de texto (1)	Obstáculo que se podría promover debido a la presentación	Tipo de obstáculo
<i>Azar</i>	Única caracterización, como causa desconocida (B, S, G, M).	Comprensión del tipo de fenómenos que aborda el cálculo probabilístico	Epistemológico
<i>Experimento Aleatorio</i>	Única modelización como imposibilidad de predecir el resultado (B, S, G, M).	Comprensión del amplio significado de esta noción	Epistemológico
<i>Experimento Determinista</i>	Definición a partir de la posibilidad de predecir a priori el resultado, (B, S, G, M).	Comprensión inadecuada de las situaciones de incertidumbre en relación con el significado de causa-efecto	Epistemológico
	Falta de énfasis en el establecimiento de la relación causa-efecto, (B, S, G, M).	No distinción entre azar y causalidad	Ontogénico
<i>Proceso/ Suceso</i>	Falta de distinción de proceso y suceso aleatorio, (B, S, G, M).	No distinción entre repetición de un experimento y experimento con múltiples resultados posibles. No distinción entre suceso experimento simple/ compuesto y entre experimento compuesto y serie aleatoria	Ontogénico
<i>Espacio muestral/ Suceso elemental</i>	Introducción a partir de la noción de conjunto, que no se clarifica (B, S, G, M-3º-4º)	Obstaculizar argumentaciones para determinar la pertenencia a ciertas clases y asignación de probabilidades	Ontogénico
	Actividades y ejemplos asociadas a solo a un tipo de generadores aleatorios (S, G).	Obstaculizan la transferencia a otros contextos	Didáctico
<i>Serie aleatoria</i>	Falta de reflexión sobre la "serie" aleatoria, (B, G).	Puede favorecer el uso de heurísticos	Didáctico

(1): Bruño (B); Santillana (S); Guadiel (G) y McGraw Hill (M)

4.2. NOCIÓN DE PROBABILIDAD

El significado escolar de la noción de probabilidad se suele introducir asociado al valor numérico que se asigna a cada suceso, o como el valor que se obtiene del análisis de la estabilidad de las frecuencias relativas.

Noción frecuencial de la probabilidad En los textos de las cuatro editoriales de la muestra existen dos perspectivas diferenciadas para el análisis de la estabilidad de las frecuencias relativas, aunque ninguna tiene en consideración las posibles dificultades asociadas a la comprensión del significado de la convergencia estocástica, lo cual puede configurar un obstáculo ontogénico.

La editorial Santillana y Bruño introducen estas nociones a nivel teórico, sin proponer actividades que favorezcan la exploración de las tendencias de las series aleatorias, como se puede analizar en el siguiente ejemplo (Santillana, 3º, pág. 252):

Observa la gráfica siguiente (Figura 1) y mira como, conforme aumenta el número de lanzamientos se observa que:

**las oscilaciones de la gráfica son menos pronunciadas (menos picos)*

**las frecuencias relativas se van acercando a un determinado valor, es decir, tiende hacia un número fijo. El número es 0,5.*

Esta tendencia se observa en todos los fenómenos aleatorios y se denomina ley del azar o de estabilidad de las frecuencias, también denominada primera ley de los grandes números.

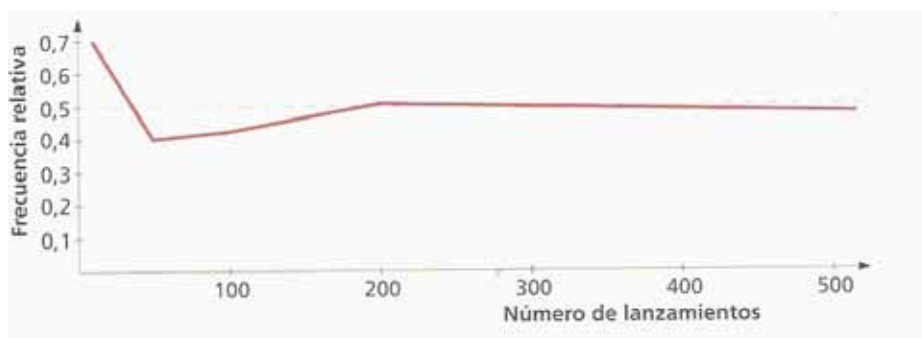


Figura 1. Evolución de las frecuencias relativas

El texto presenta una breve aclaración del significado de tender hacia un número fijo:

Cuando son pocas las veces que repites el lanzamiento de una moneda, la frecuencia relativa que esperas 0,5, y la que obtienes se parecen muy poco. Conforme vas aumentando el número de lanzamientos, esa diferencia se va reduciendo, y cuando lo repites muchísimas veces, esa diferencia se hace casi nula. Quiere esto decir que la frecuencia relativa empírica (la que obtienes al repetir el experimento) se parece a la frecuencia relativa esperada, tanto más cuanto mayor sea el número de lanzamientos, y llega a ser casi idéntica cuando el número de lanzamientos es muy grande.

La propuesta de actividades, que complementa la introducción de la noción frecuencial de la probabilidad para estas dos editoriales, se reduce al cálculo de la frecuencia relativa, a partir de una tabla que recoge la frecuencia absoluta teórica de un dado. No se pretende que los alumnos experimenten la repetición de un experimento

aleatorio, y construyan series aleatorias que les permitan indagar sobre el significado de estabilidad de frecuencias aleatorias, y comprender el significado de la noción de probabilidad. Esta propuesta se puede configurar como un *obstáculo didáctico* para la construcción de la noción frecuencial de la probabilidad puesto que los alumnos, podrían basar sus argumentaciones en el uso de heurísticos como el “outcome approach” o la falacia del jugador. También se podrían convertir en un *obstáculo ontogénico* en la comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas.

En cambio, las editoriales Guadiel y McGraw Hill proponen un conjunto de actividades para que los alumnos puedan analizar el significado de la estabilidad de las frecuencias relativas, como se puede ver en la siguiente actividad (Guadiel, 2º ESO, pág. 132, ej. 15):

Coge un dado de quinielas y efectúa 50 lanzamientos. Anota el número de veces que sale cada signo y completa la siguiente tabla con las frecuencias absolutas y relativas de los sucesos 1, X y 2.

Suceso	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
1		
X		
2		

Reúne en una sola tabla tus resultados y los de tus compañeros y analízalos.

El texto no introduce ningún comentario sobre cómo se deben analizar los resultados, dejando a la elección del profesor y/o alumno el nivel de profundización en la inferencia del significado de la estabilidad de las frecuencias, la ausencia de regularidad de las series aleatorias o la impredecibilidad del resultado. En el caso de la editorial McGraw Hill y Guadiel, las propuestas didácticas incluyen actividades que favorecen la reflexión sobre el significado de la noción frecuencial de la probabilidad, con un número reducido de experimentos. La consideración de un número pequeño de repeticiones puede, a la larga, ocasionar un *obstáculo epistemológico* en la comprensión del significado de convergencia aleatoria, y reforzar la errónea validez del heurístico de la representatividad.

Comparación de probabilidades En los textos de las editoriales Bruño y Santillana, se introduce el proceso de cuantificación de las probabilidades, y la asignación de un valor numérico a partir de la comparación entre sucesos aleatorios correspondientes a un único tipo de generadores aleatorios. Un ejemplo de esta situación se puede observar en el siguiente texto incluido en el texto de 3º de ESO de la editorial Bruño (pág. 274):

Si giramos la aguja, parece claro que la probabilidad de pararse en la zona “Blanco” es mayor que la probabilidad de pararse en la zona “Rojo”. Se trata de un experimento con dos sucesos elementales que tienen probabilidades distintas.



Este tipo de generadores aleatorios permite que los alumnos indaguen sobre las comparaciones de tipo geométrico, que favorecen la visualización de la proporción a

considerar. Sin embargo, aunque facilitan el establecimiento de comparaciones, pueden fomentar la asociatividad entre este tipo de generador y la estrategia a aplicar para asignar las probabilidades, pudiéndose configurar como un *obstáculo didáctico* para la realización de comparaciones mediante otros generadores.

La consideración de las expectativas del suceso, entendidas en el sentido de Huygens, ha de permitir la correcta comprensión del significado del valor esperado (esperanza matemática) y el significado de juego justo. Sólo la editorial McGraw Hill introduce en sus textos actividades en que los alumnos deben inferir el valor esperado, como por ejemplo:

Lanza 100 chinchetas y estima la probabilidad de que una chincheta caiga con la punta hacia arriba. (McGraw Hill, 4º A, pág. 212, ej. 15).

La introducción de ejemplificaciones que favorezcan la comparación de sucesos, y la asignación de un valor numérico a estos, se introduce en los textos como paso previo a las explicaciones relativas a la aplicación de la *Regla de Laplace*. Los textos de las cuatro editoriales de la muestra presentan estrategias diferentes para poder aplicar esta regla.

Equiprobabilidad y regla de Laplace Los textos no clarifican las condiciones requeridas para la equiprobabilidad. La editorial Bruño identifica en 1º de ESO (pág. 242), el significado de equiposible con equiprobable:

Cuando los sucesos de un experimento aleatorio tienen las mismas posibilidades de obtenerse se dice que son sucesos equiprobables.

En el texto se indica que, para poder aplicar la Regla de Laplace, los contextos de aplicación deben ser equiprobables, presentando como ejemplificaciones de sucesos elementales equiprobables los correspondientes al lanzamiento de dados y monedas. Sólo en 3º de ESO, presenta ejemplos de generadores aleatorios como chinchetas o ruletas en que, según el texto, visualmente se puede determinar que no son equiprobables. No se incluyen actividades en que los alumnos puedan experimentar sobre el significado de sucesos equiprobables.

La editorial Guadiel, al igual que la editorial Bruño, propone en la definición de suceso equiprobable la identificación con el significado de equiposible. La diferencia radica en que propone una actividad para comprobar si un experimento es equiprobable, previo a la explicación del significado de esta noción:

*Tenemos dos dados, uno perfecto, en el que todas las caras pesan igual, y otro en el que una de las caras pesa más.
¿Crees que en los dos dados todos los sucesos tienen la misma probabilidad de producirse? (Guadiel, 4º, pág. 236).*

La editorial Santillana define los sucesos elemental equiprobables a partir de que tengan la misma probabilidad de salir:

Todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de salir, y se denominan equiprobables (Santillana, 4º A, pág. 187).

Dicha definición, se complementa con un ejercicio para razonar si los sucesos elementales de un cierto experimento son equiprobables:

Justifica tu respuesta. En el lanzamiento de una moneda, los sucesos correspondientes al número de caras, ¿son equiprobables? (Santillana 4º A, pág. 189).

La editorial McGraw Hill propone, previamente a la introducción de la definición de suceso equiprobable, el análisis de la estabilidad de las frecuencias relativas de sucesos elementales equiposibles y no. Indica que la aplicación de la regla de Laplace sólo puede realizarse para sucesos elementales equiprobables, indicando que, en el caso contrario, se debe estimar a partir del análisis de la estabilidad de las frecuencias relativas:

En ejemplos como los anteriores, o en algunas experiencias como las del lanzamiento de chinchetas o tabas, o la predicción de la probabilidad de que un fumador padezca una enfermedad respiratoria, etc., solamente podemos calcular la probabilidad haciendo una estimación (observando un gran número de casos y calculando la frecuencia relativa) (McGraw Hill, 4º A, pág. 208).

En cada uno de los niveles educativos se introducen actividades que tienen por finalidad analizar si ciertos sucesos elementales son equiprobables o no, asociados a la experimentación con variedad de generadores aleatorios y fenómenos aleatorios relacionados con situaciones cercanas al alumnado.

En resumen, el tratamiento de la noción de equiprobabilidad que se realiza en los textos puede ocasionar dificultades en la comprensión de dicha noción, ya que no se clarifica. Además, en los textos en que no se presentan actividades para razonar si los sucesos elementales son equiprobables, dándose por supuesta esta propiedad, se puede fomentar la aparición del *sesgo de la equiprobabilidad*, que se configura como un *obstáculo ontogénico*.

Este sesgo se refuerza en los libros de diferentes formas. En primer lugar, por la ignorancia en los textos de la importancia de la comprobación de esta propiedad como paso previo a la aplicación de la Regla de Laplace. En segundo lugar, por la presencia de la equi-posibilidad, al presentar los ejercicios asociados a juegos aleatorios con sucesos elementales equiposibles como monedas, dados, etc. Y, en tercer lugar, el método dicotómico que reposa sobre las opciones de aparición y de no aparición de cada resultado aislado, con un 50% para cada posibilidad, sesgados por el uso de heurísticos como la falacia del jugador o el “outcome approach”, comentados en la sección anterior.

El uso de estos heurísticos también pueden ser un obstáculo para la comprensión del significado de dependencia e independencia de sucesos aleatorios, ya que predisponen a considerar que dos sucesos consecutivos están siempre relacionados (Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier y Lipson, 1993; Meletiou y Stylianou, 2003).

Dependencia e independencia de los sucesos aleatorios La introducción de dichas nociones difiere según el texto de cada editorial. La principal diferencia que existe entre las cuatro editoriales radica en cómo se introduce el significado de sucesos dependientes e independientes. La editorial Bruño distingue ambas definiciones a partir de identificar las diferencias existentes al realizar extracciones con o sin reemplazamiento. La editorial Santillana define la independencia o no de sucesos en función de la influencia de la ocurrencia de un suceso respecto al otro. Ambas editoriales deducen, mediante ejemplificaciones en que se aplica la regla de Laplace, las fórmulas que relacionan la probabilidad condicionada con el producto de probabilidades. En cambio, las editoriales Guadiel y McGraw Hill definen directamente la dependencia e independencia a partir del establecimiento de estas igualdades. En el caso concreto de la editorial McGraw Hill se introduce previamente el significado de la probabilidad condicionada a partir del análisis

de la diferencia existente al realizar experimentos con y sin reemplazamiento. Las actividades propuestas en las cuatro editoriales reducen el estudio de la dependencia e independencia a la caracterización de las diferencias debidas al reemplazamiento o no, como por ejemplo:

Extraemos dos cartas de una baraja, una después de otra y sin devolución. Calcula la probabilidad de obtener dos figuras en los siguientes casos:

- a) *La primera carta es un as*
- b) *La primera carta es un caballo (Guadiel 4º, pág. 241, ej. 28).*

Los contextos básicos que se utilizan para analizar la dependencia e independencia de los sucesos aleatorios y calcular su probabilidad son generadores aleatorios como urnas y barajas, que facilitan la comprensión del significado de reemplazamiento. La introducción de estas nociones, a partir de un tratamiento que se fundamente en el análisis del reemplazamiento con estos generadores aleatorios puede ser un *obstáculo didáctico* al asociar la estrategia de cálculo de la probabilidad con el generador aleatorio, impidiendo, además, la generalización de estas nociones a otros contextos no asociados con pruebas aleatorias (Truran y Truran, 1996) o la comprensión del significado en el mundo real (Kelly y Zwiers, 1988).

A modo de resumen recogemos en la Tabla 3 el tratamiento reflejado en los libros de las diferentes nociones asociadas a la probabilidad y la naturaleza del obstáculo que dicho tratamiento puede inducir.

Tabla 3. Posibles obstáculos asociados con el tratamiento de la noción de probabilidad

Noción analizada	Tratamiento en los libros de texto (1)	Obstáculo que se podría promover debido a la presentación	Tipo de obstáculo
Frecuencial de Probabilidad	Falta de reflexión sobre la convergencia estocástica (B, S, G, M).	Transferirla convergencia a muestras pequeñas	Ontogénico
	Introducción, sólo a nivel teórico, de la estabilidad de las frecuencias relativas, (B, S).	Argumentaciones basadas en el uso de heurísticos	Didáctico
Comparación de Probabilidades	Cuantificación y asignación de probabilidades a partir de la comparación entre sucesos aleatorios generados mediante ruletas, (B, S).	Asociar el generador y la estrategia al asignar probabilidades	Didáctico
Equiprobabilidad	Circularidad al definir equiprobabilidad (B-1º, G-4º) Suponer la equiprobabilidad (B).	Sesgo de equiprobabilidad	Ontogénico
Dependencia e independencia	Actividades y ejemplos asociadas a generadores aleatorios sólo en contexto de reemplazamiento, (B, S, G, M).	No transferencia a otros contextos	Didáctico

(1): *Bruño (B); Santillana (S); Guadiel (G) y McGraw Hill (M)*

5. REFLEXIONES FINALES

Nuestro análisis muestra que los textos analizados, en general, no tienen en consideración diversos aspectos en el “Tratamiento del Azar”, que pueden convertirse en

obstáculos en la construcción de las nociones introducidas en dichos textos y para otras nociones que se desarrollaran en cursos posteriores.

En primer lugar, los textos presentan básicamente el *azar* modelizado a partir de argumentaciones asociadas con la suerte y la *aleatoriedad* con la incertidumbre del suceso, caracterizaciones que son insuficientes para poder comprender adecuadamente el significado de las nociones probabilísticas. La comprensión adecuada de la noción de sucesión aleatoria necesita de la valoración subjetiva de la complejidad de la secuencia, que se sustenta en una caracterización de la noción de aleatoriedad que supera las modelizaciones simples propuestas en los textos. La contraposición a la noción de fenómeno determinista, enfatiza las relaciones de causa y efecto que, a su vez, pueden producir sesgos en la interpretación correcta del significado de sucesos dependientes e independientes y constituirse como un obstáculo para la posterior comprensión de la noción de probabilidad.

En segundo lugar, en los textos se incluyen básicamente ejemplificaciones y actividades asociadas a *generadores aleatorios con espacios muestrales finitos y sucesos elementales equiprobables*, que surgen de estudios de generadores aleatorios simples, como ruletas, urnas, dados, barajas o monedas, que facilitan determinar los elementos del espacio muestral, pero se pueden configurar como un obstáculo para la posterior determinación y generalización del significado de espacio muestral a contextos cotidianos y el posterior cálculo de la probabilidad. A su vez, estos ejemplos y actividades asociadas a generadores aleatorios facilitan la caracterización de la equiprobabilidad de los sucesos que, a menudo, no se solicita en el texto. La falta de comprobación de dicha propiedad favorece la identificación de la equiprobabilidad como equi-ignorancia de las propiedades de los sucesos y podrá constituir un obstáculo para la determinación de sucesos aleatorios no equiprobables.

En tercer lugar, en los libros de texto no se clarifica el significado de ciertos términos como imprevisible, colección, conjunto, seguro, imposible, converge,... lo que podría dificultar la construcción de las nociones probabilísticas que los sustentan, como fenómeno y experimento, suceso y proceso, espacio muestral, secuencia aleatoria y estabilidad de las frecuencias relativas.

En cuarto lugar, en los textos la construcción de la *noción frecuencial de la probabilidad* está sujeta a la comprensión adecuada de la convergencia estocástica, no iniciada en estos niveles educativos, y que se desarrolla a nivel intuitivo. En las ejemplificaciones y actividades de los textos no se incluye cuestiones que permitan que los alumnos sean conscientes de sus concepciones sobre la incidencia del azar en las series aleatorias, apareciendo en forma de heurísticos (falacia del jugador, representatividad de la muestra, “outcome approach”, etc.).

Todos estos resultados aportan elementos a tener en cuenta en la elaboración de libros de texto, tanto para la consideración de los posibles obstáculos que la presentación y tratamiento del conocimiento probabilístico pueden inducir, como para promover su integración en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

REFERENCIAS

- Ayton, P., Hunt, A.J., y Wright, G. (1989). Psychological conceptions of randomness. *Journal of Behavioral Decision Making*, 2, 221-238.
- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M., y Serradó, A (2003). Hazard's treatment in secondary school. *Proceedings of CERME 3. Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Belaria, Italy.
- Azcárate, P., Serradó, A., y Cardeñoso, J.M. (2004). Obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: la noción de azar y aleatoriedad. *Comunicación presentada en el XII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Huelva, España.
- Batanero, C., y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 558-567.
- Bennett, D. J. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications*. Doctoral dissertation, New York University. Dissertation Abstracts International, 54, 449A.
- Bennett, D. J. (2000). *Aleatoriedad*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2, 165-198.
- Cardeñoso, J.M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Decreto 106/1992 de 9 de junio por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (BOJA nº 56 de 20 de junio de 1992). [Online: <http://www.juntadeandalucia.es/educacion>]
- Falk, R., y Konold, C. (1992). The psychology of learning probability. En F. S. Gordon y S. P. Gordon (Eds.), *Statistics for the Twenty-First Century* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Fischbein, E., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge: University Press.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Henry, M. (2001). Notion d'expérience aleatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. En M. Henry (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173-186). Paris: Presses Universitaires de France.
- Hoeman, H. W., y Ross, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En C. J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition*. Nueva York: Springer Verlag.
- Inhelder, B., y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.
- Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgments under uncertainty: heuristics and biases*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Kelly, I. W., y Zwiers, F. W. (1988). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-26). Victoria, BC: International Statistical Institute.
- Kolmogorov, A.N. (1950). *Foundations of Theory of Probability*. New York: Chelsea.
- Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. *Journal of Statistics Education*, 3(1).
[Online: <http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html>]

- Konold, C., Pollatsek, A., Well, A.D., Lohmeier, J., y Lipson, A. (1993). Inconsistencies in student's reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 392-414.
- Kyburg, H. E. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.
- Lecoutre, M. P., y Duran, J. L. (1988). Judgements probabilistics et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368
- Malara, N. (1989): *Probabilità e statistica nella scuola media. Analisi di alcuni libri di testo*. [Probability and statistics in secondary school. Analysing some textbooks]. Modena, Italia: Università di Modena.
- Meletiou, M., y Stylianou, D. (2003). On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning. *Proceedings of CERME 3. Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Belaria, Italy.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2001). Reflexiones sobre el lenguaje probabilístico en los libros de texto de Educación Secundaria. Comunicación presentada en las *Jornadas Europeas de Estadística*. Mallorca; Instituto Balear de Estadística.
[Online: http://www.caib.es/ibae/esdeveniments/jornades_10_01]
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge&Kegan Paul.
- Poincaré, J. H. (1979). El azar. En J. Newman (Comp). *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, (Vol III, pp. 68-82). Barcelona: Grijalbo.
- Sánchez, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Serradó, A. (2003). *El tratamiento del azar en educación secundaria obligatoria*, Doctoral Dissertation, University Microfilms Incorporated's Proquest Digital Dissertations, Michigan. AAT 3126908 Number.
- Serradó, A., y Azcárate, P. (2003). Estructura de las unidades dedicadas al "Tratamiento del Azar" en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, 15(1), 67-98.
- Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J.M (2005). Randomness in textbooks: the influence of deterministic thinking. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4: Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Barcelona, Spain: Ramon Llull University.
- Truran, J. M. (1994). Children's understanding of random generators. In J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics*. University of Minnesota.
- Truran, J. M., y Truran, K. M. (1996). Statistical independence - one concept or two? Implications for research for classroom practice. Comunicación presentada en el *Eighth International Conference on Mathematics Education (ICME 8)*. Sevilla.
- Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Judgements under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgments under Uncertainty: Heuristics and Biases* (pp. 3-22). New York: Cambridge University Press.

PILAR AZCÁRATE GODED
Verderón, 9
11100 San Fernando
Cádiz, Spain

APÉNDICE

Editorial Bruño:

- Miñano, A., y Ródenas, J. A. (1998). *Matemáticas 1º*. Madrid: Editorial Bruño.
 Miñano, A., y Ródenas, J. A. (1998). *Matemáticas 2º*. Madrid: Editorial Bruño.
 Miñano, A., y Ródenas, J. A. (1998). *Matemáticas 3º*. Madrid: Editorial Bruño.
 Miñano, A., y Ródenas, J. A. (1998). *Matemáticas 4º A*. Madrid: Editorial Bruño.
 Miñano, A., y Ródenas, J. A. (1998). *Matemáticas 4º B*. Madrid: Editorial Bruño.

Editorial Santillana:

- Almodovar, J. A., Corbalán, F., García. P., Gil, J., y Nortes, A. (1999). *Matemáticas. Curso 1º ESO; Matemáticas. Curso 2º ESO*. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.
 Almodovar, J.A., García. P., Gil, J., y Vázquez, C. (1999). *Matemáticas. Curso 3º ESO*. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.
 Almodovar, J.A., Gil, J., y Nortes, A. (1998). *Matemáticas Opción A. Curso 4º ESO*. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.
 Almodovar, J.A., García. P., Gil, J., y Vázquez, C. (1999). *Matemáticas Opción B. Curso 4º ESO*. Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.

Editorial Guadiel:

- Guasch, M., Merino, R., Solsona, J., y Equipo Guadiel (1996). *Matemáticas 1*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé.
 Fuster, M., Martín Hernández, F., y Equipo Guadiel (1997). *Matemáticas 2*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé.
 Doménech, M. A., Doménech, M., Jimeno, M., Morató, M. A., Suñé, M. M., Tomás, J., y Equipo Guadiel (1995). *Matemáticas 3*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé.
 Fuster, M., Jimeno, M., Martín, F., Martínez, E., Morató, M. A., Tomás, J., y Equipo Guadiel (1996). *Matemáticas 4 (B)*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé.

Editorial Mc Graw Hill:

- Pancorbo, L., Becerra, M. V., Martínez, R., y Rodríguez, R. (1995). *Matemáticas 1*. Madrid: McGraw-Hill/ Interamericana de España, S.A.U.
 Becerra, M. V., Martínez, R., Pancorbo, L., y Rodríguez, R. (1996). *Matemáticas 2*. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A.U.
 Amigo, C., Peña, P., Pérez, A., Rodríguez, A., Sivit, F., Asencio, M^a. J., y Vicente, E. (1996). *Matemáticas 3*. Madrid: McGraw-Hill /Interamericana de España, S.A.U.
 Amigo, C., Peña, P., Pérez, A., Rodríguez, A., Sivit, F., Asencio, M^a. J., y Vicente, E. (1996). *Matemáticas 4 Opción A*. Madrid: McGraw-Hill /I Interamericana de España, S.A.U.
 Amigo, C., Peña, P., Pérez, A., Rodríguez, A., Sivit, F., Asencio, M^a. J., y Vicente, E. (1997). *Matemáticas 4 Opción B*. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A.U.